Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres

Martine Pathiaux

Résultats de Boyd sur les nombres de Pisot-Salem

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 20, n° 1 (1978-1979), exp. n° 2, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_1_A1_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
20e année, 1978/79, n° 2, 10 p.

16 octobre 1978

RÉSULTATS DE BOYD SUR LES NOMBRES DE PISOT-SALEM

par Martine PATHIAUX (*)
[Univ. P. et M. Curie]

Partie I.

Introduction. - Si P est un polynôme de degré s, on désignera par $\tilde{P}(z)$ son polynôme réciproque, c'est-à-dire $\tilde{P}(z) = z^s P(\frac{1}{z})$. Soit $P(z)$ le polynôme minimal d'un nombre de Pisot, SALEM a démontré que si $R_{n,\varepsilon}(z)$ sont les polynômes définis par les égalités

$$R_{n,\varepsilon}(z) = z^n P(z) + \varepsilon \tilde{P}(z) \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1 ,$$

alors il existe $n_0 \in \underset{\sim}{N}$ tel que, si $n \geqslant n_0$, $R_{n,\varepsilon}(z)$ est le produit d'un polynôme cyclotomique et d'un polynôme $T_{n,\varepsilon}(z)$, où $T_{n,\varepsilon}(z)$ est le polynôme minimal d'un nombre de Salem (avec $n_0 = 1$ si $\varepsilon = 1$).

Le travail de BOYD [1] est de démontrer en quelque sorte la réciproque, c'est-à-dire que tout nombre de Salem peut être produit par un nombre de Pisot.

LEMME. - Soit $S(z)$ un polynôme à coefficients réels, de degré s, n'ayant pas de racine sur $|z| = 1$. On suppose qu'il existe $n \in \underset{\sim}{N}$, $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, tel que que le polynôme $Q(z) = z^n S(z) + \varepsilon \tilde{S}(z)$ soit le produit d'un polynôme minimal d'un nombre de Salem et d'un polynôme cyclotomique n'ayant que des racines simples ; alors, une condition nécessaire et suffisante pour que $S(z)$ ait un seul zéro dans $|z| > 1$ est que

$$\varepsilon Q'(\alpha)\, S(\alpha) \times \alpha^{1-s} < 0$$

pour toute racine α de $Q(z)$ de module égal à 1.

Démonstration. - Soit k le nombre de racines de $S(z)$ dans $|z| > 1$. L'équation $Q(t, z) = z^n S(z) + \varepsilon t \tilde{S}(z) = 0$ définit une courbe algébrique $z = Z(t)$ qui est une fonction algébrique de t, ayant $n + S$ branches notées $z = z_i(t)$, fonctions analytiques de t. On oriente chacune des courbes $z = z_i(t)$ dans le sens des t croissants pour t réel positif.

Pour $0 \leqslant t < 1$, d'après le théorème de Rouché, la courbe algébrique aura $n+s-k$ branches dans $|z| < 1$ et k branches dans $|z| > 1$, chacune d'elle aboutissant aux zéros de $Q(z)$. On remarque que $Q(\frac{1}{t}, \frac{1}{z}) = \varepsilon / t z^{n+s}\, Q(z, t)$. Donc pour obtenir les courbes pour $t > 1$, il suffit d'inverser les courbes précédentes par

---

(*) Texte reçu le 21 mai 1979
Martine PATHIAUX, 187 boulevard Bineau, 92200 NEUILLY

rapport au cercle unité C .

Soit α_1 , α_2 , ... , α_{n+s-2} les zéros de $Q(z)$ situés sur $|z| = 1$, et $z_i(t)$ la branche vérifiant $z_i(1) = \alpha_i$ (unique car α_i est zéro simple de $Q(z)$). Les courbes $z_i(t)$, pour $i = 1 , 2 , \ldots , n + s - 2$, sont orthogonales à C , étant donnée la propriété d'inversion. Donc $\overline{\alpha}_i \, z_i'(1)$ est réel pour $i = 1,2,\ldots,n+s-2$ si $z_i'(1) \neq 0$.

Or $z_i'(1) = - \varepsilon(\tilde{S}(\alpha_i)/Q'(\alpha_i))$; $\tilde{S}(\alpha_i) \neq 0$ car $\tilde{S}$ n'a pas de zéro sur $|z| = 1$, et $Q'(\alpha_i) \neq 0$ car $Q(z)$ n'a que des zéro simples.

De plus,

pour $k - 1$ indices $i \in \{1 , 2 , \ldots , n + s - 2\}$, on a $\overline{\alpha}_i \, z_i'(1) < 0$,

pour $n + S - k - 1$ indices $i \in \{1 , 2 , \ldots , n + s - 2\}$, on a $\overline{\alpha}_i \, z_i'(1) > 0$.

Donc k sera égal à 1 si, et seulement si,

$$\overline{\alpha}_i \, z_i'(1) > 0 \quad \text{pour} \quad i = 1 , 2 , \ldots , n + s - 2 ,$$

ou encore

$$\overline{\alpha}_i \, \varepsilon \frac{\tilde{S}(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)} < 0 \quad \text{pour} \quad i = 1 , 2 , \ldots , n + s - 2 ,$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{\overline{\alpha}_i \, \varepsilon \alpha_i^S \, S(1/\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)} < 0$$

ou encore à

$$\frac{\varepsilon \alpha_i^{s-1} \, S(\overline{\alpha}_i) \, S(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i) \, S(\alpha_i)} < 0$$

ou encore

$$\varepsilon \alpha_i^{1-s} \, Q'(\alpha_i) \, S(\alpha_i) < 0 \quad \text{pour} \quad i = 1 , 2 , \ldots , n + s - 2 .$$

THÉORÈME. - Soit $T(z)$ le polynôme minimal d'un nombre de Salem, alors il existe un polynôme $P(z)$, polynôme minimal d'un nombre de Pisot tel que

$$(z^2 + 1)T(z) = zP(z) + \tilde{P}(z) .$$

Démonstration. - Soit $T(z)$ le polynôme minimal d'un nombre de Salem et $R(z) = (z^2 + 1)T(z)$; $T(z)$ est un polynôme de degré $2m$, et $R(z)$ s'écrit alors

$$R(z) = z^{2m+2} + d_1 \, z^{2m+1} + \ldots + d_m \, z^{m+2} + 2d_{m+1} \, z^{m+1} + d_m \, z^m + \ldots + d_1 \, z + 1$$

avec $d_i \in \underset{\sim}{Z}$; et si

$$P(z) = c_1 + c_2 \, z + \ldots + c_m \, z^{m-1} + d_{m+1} \, z^m + (d_m - c_m) z^{m+1} + \ldots + (d_1 - c_1) z^{2m} + z^{2m+1}$$

avec $c_1 \neq 0$, alors $P(z)$ vérifie $R(z) = zP(z) + \tilde{P}(z)$. Il suffit donc de déterminer $c_1 , c_2 , \ldots , c_m \in \underset{\sim}{Z}^m$, tel que $P(z)$ ait un seul zéro dans $|z| > 1$ et aucun zéro dans $|z| = 1$.

Soient $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_{2m}$ les racines de $R(z)$ (qui sont simples) situés sur $|z| = 1$; si $P(\alpha_i) \neq 0$ pour $i = 1 , 2 , \ldots , 2m$, alors $P(z)$ n'a pas de racines sur $|z| = 1$. En effet, si ρ était une telle racine, ρ serait aussi racine de $\tilde{P}(z)$ et donc aussi de $R(z)$. Donc il existerait $i \in \{1 , 2 ,\ldots, 2m\}$ tel que $\rho = \alpha_i$. Soit $P(\alpha_i) = 0$.

En conclusion, d'après le lemme, si

$$(1) \qquad \varepsilon R'(\alpha_i)\, P(\alpha_i)\, \alpha_i^{-2m} < 0 \quad \text{pour} \quad i = 1 , 2 , \ldots , 2m$$

alors $P(z)$ aura un seul zéro dans $|z| > 1$ et aucun zéro sur $|z| = 1$.

$\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_{2m}$ sont complexes conjugués. Le système d'inégalités (1) se réduit donc à un système de m équations du type

$$(2) \qquad a_{1,j}\, c_1 + \ldots + a_{m,j}\, c_m > b_j \quad \text{pour} \quad j = 1 , 2 , \ldots , m$$

avec

$$a_{ij} = \delta_j \left(\frac{\alpha_j^{m-i+1} - \alpha_j^{-m+i-1}}{i}\right) , \text{ où } \delta_j = \pm 1 .$$

Il suffit donc de déterminer $(c_1 , c_2 ,\ldots, c_m) \in \underset{\sim}{Z}^m$, avec $c_1 \neq 0$ vérifiant le système (2) d'inégalités.

Or la matrice $A = (a_{i,j})$ est non singulière : En effet, si la matrice A était singulière, il existerait $c_1 , c_2 , \ldots , c_m \in \underset{\sim}{R}^m - \{0\}$ tel que

$$c_1(\alpha_j^m - \alpha_j^{-m}) + \ldots + c_m(\alpha_j - \frac{1}{\alpha_j}) = 0 \quad \text{pour} \quad j = 1 , 2 , \ldots , m .$$

Donc le polynôme

$$c_1\, x^{2m} + c_2\, x^{2m-1} + \ldots + c_m\, x^{m+1} - c_m\, x^{m-1} - \ldots - c_1$$

aurait pour zéros $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_m , \bar{\alpha}_1 , \ldots , \bar{\alpha}_m$. Or 1 est racine de ce polynôme et est distinct des autres zéros. Le polynôme aurait donc $2m + 1$ zéros distincts, donc serait identiquement nul (ou bien déterminant du type Vandermonde).

Donc la région de $\underset{\sim}{R}^m$, déterminée par les inégalités (2), est un cône, et contient donc une infinité de points $(c_1 , c_2 , \ldots , c_m) \in \underset{\sim}{Z}^m$ avec $c_1 \neq 0$.

Remarque 1. - On voit donc qu'il existe une infinité de polynômes $P(z)$ répondant au problème. De plus, $c_1 = P(0)$, peut être choisi arbitrairement grand. Or si θ est un nombre de Pisot, et vérifie $P(\theta) = 0$, alors $\theta \geqslant |P(0)| = |c_1|$. Donc tout nombre de Salem peut être associé à des nombres de Pisot arbitrairement grands.

Remarque 2. - On peut faire une démonstration identique avec

$$Q(z) = (z - 1)T(z) = zP(z) - \tilde{P}(z) .$$

Définition. - Soit σ , un nombre de Salem, et θ un nombre de Pisot, de polynôme minimal $P(z)$; θ est associé à σ si, et seulement si, il existe $n \in \underset{\sim}{N}$,

$\varepsilon \in \{-1 , +1\}$ tel que σ soit racine du polynôme $z^n P(z) + \varepsilon\tilde{P}(z)$.

D'après le théorème précédent, à tout nombre de Salem on peut associer une infinité de nombres de Pisot. De plus, on peut démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME. - Soit σ_k une suite de nombres de Salem, distincts, telle que $\lim_{k\to\infty} \sigma_k = \sigma$ avec $\sigma > 1$, et σ différent d'un nombre de Pisot ; alors si θ_k est un nombre de Pisot associé à σ_k , alors $\lim_{k\to\infty} \theta_k = +\infty$.

Partie II.

Introduction.

Définition. - $\mathcal{M}_p$ est l'ensemble des fonctions $f(z)$ méromorphes dans $|z|\leq 1$, holomorphes à l'origine, bornées par un en module sur $|z| = 1$, ayant un nombre fini p de pôles dans $|z| < 1$.

Marthe GRANDET ([3], p. 6) a montré que si $f \in \mathcal{M}_p$, et si le développement en série de Taylor au voisinage de $z = 0$ de f s'écrit $f = u_0 + u_1 z + \ldots + u_n z^n + \ldots$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et, pour $n \geq n_0$, deux polynômes $A_n(z)$ et $Q_n(z)$ de $\mathbb{C}[z]$, de degré au plus égal à n , vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $(A_n(z)/Q_n(z)) = u_0 + u_1 + \ldots + u_n z^n + s_{n+1} z^{n+1} + \ldots$,

(2) $Q_n(0) = 1$,

(3) $Q_n(z)\,\tilde{Q}_n(z) - A_n(z)\,\tilde{A}_n(z) = w_n z^n$,

avec $\tilde{Q}_n(z) = z^n \tilde{A}_n(\frac{1}{z})$ et $\tilde{A}_n(z) = z^n \tilde{A}_n(\frac{1}{z})$ ($n_0 = 0$ si f n'a pas de pôles dans $|z| < 1$).

De plus, la suite w_n est une suite décroissante, positive pour $n \geq n_0$ et si $w_n = 0$ pour $n \geq n_0$, alors

$$f(z) = \varepsilon z^n \frac{\tilde{Q}(z)}{Q(z)} \quad \text{avec} \quad |\varepsilon| = 1 .$$

Un des résultats de BOYD est d'exprimer $\lim_{n\to\infty} w_n$ en fonction de la moyenne géométrique de $1 - |f|^2$ sur $|z| = 1$ et du produit des pôles de f dans $|z| < 1$.

Comme application de ce résultat, on déduit que si $S^{(h)}$ désigne l'ensemble dérivé h-ième de l'ensemble S des nombres de Pisot, alors $\min S^{(h)} \geq (h+1)^{1/2}$, inégalité qui améliore le résultat connu $\min S^{(h)} \geq h^{1/4}$ [2] ; et si k est entier, alors k n'appartient pas à $S^{(k^2-1)}$, mais rien ne contredit le fait que $k \in S^{(k^2-2)}$.

Définition. - Soit $g(e^{i\theta})$ une fonction positive, bornée, mesurable sur $(0,2\pi)$.

On pose

$$\mathfrak{L}(g) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log g(e^{i\theta})\, d\theta\right) .$$

THÉORÈME. - Soit $f \in \mathcal{H}_p$, ayant pour pôles $\frac{1}{\theta_1}, \ldots, \frac{1}{\theta_p}$ dans $|z| < 1$ alors

$$w(f) = \lim_{n\to\infty} w_n = \mathfrak{L}(1 - |f|^2) \prod_{i=1,\ldots,p} |\theta_i|^2 .$$

Démonstration. - On suppose que $f(z)$ n'est pas de la forme $\varepsilon z^s \frac{\tilde{Q}(z)}{Q(z)}$ car dans ce cas le théorème est évident, c'est-à-dire $w_n > 0$ pour $n \geqslant n_0$.

(a) propriétés de $\mathfrak{L}(g)$:

(4) $\mathfrak{L}(g_1 g_2) = \mathfrak{L}(g_1)\, \mathfrak{L}(g_2)$.

(5) $\mathfrak{L}(g) \leqslant \mathfrak{A}(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{i\theta})\, d\theta$ ([4], p. 136-138).

(6) $\mathfrak{L}|f| = |f(0)|(\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n)^{-1}$ si f est holomorphe dans $|z| \leqslant 1$ et s'annule aux points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$
(formule de Jensen [5], p. 68).

(7) $\mathfrak{L}(g) = \inf_{P\in\mathbb{C}[z],P(0)=1} \mathfrak{A}(|P|^2 g)$
(formule de Szegö [5], p. 50).

(b) autres propriétés de A_n et Q_n pour $n \geqslant n_0$:

(8) $Q_n(z)$ a p zéros dans $|z| < 1$.

(9) Si $f_{n+1}(z) = (fQ_n - A_n)/(z(\tilde{Q}_n - \tilde{A}_n f))$, alors $f_{n+1}(z)$ est holomorphe dans $|z| \leqslant 1$.

(10) $|f_{n+1}(z)| \leqslant 1$ si $|z| = 1$.

(11) $\frac{w_{n+1}}{w_n} = 1 - |\gamma_n|^2$ avec $\gamma_{n+1} = f_{n+1}(0)$.

(12) $f_{n+2}(z) = \frac{f_{n+1} - \gamma_{n+1}}{1 - \bar{\gamma}_{n+1} f_{n+1}}$ ([3], p. 6).

(c) démonstration :

L'égalité (9) donne

$$f = \frac{A_n + z\tilde{Q}_n f_{n+1}}{Q_n + z\tilde{A}_n f_{n+1}}$$

soit

$$1 - |f|^2 = \frac{(|Q_n|^2 - |A_n^2|)(1 - |f_{n+1}|^2)}{|Q_n + z\tilde{A}_n f_{n+1}|^2} .$$

Donc

$$\mathfrak{L}(1 - |f|^2) = w_n \frac{\mathfrak{L}(1 - |f_{n+1}|^2)}{\mathfrak{L}(|Q_n + z\tilde{A}_n f_{n+1}|^2)} .$$

Or $A_n + z\tilde{Q}_n f_{n+1}$ et $Q_n + z\tilde{A}_n f_{n+1}$ sont deux fonctions holomorphes dans $|z| \leqslant 1$, et n'ont pas de zéros communs car si α annule ces deux fonctions alors

les égalités

$$A_n(\alpha) + \alpha\tilde{Q}_n(\alpha)\, f_{n+1}(\alpha) = 0$$
$$Q_n(\alpha) + \alpha\tilde{A}_n(\alpha)\, f_{n+1}(\alpha) = 0$$

impliqueraient

$$A_n(\alpha)\,\tilde{A}_n(\alpha) - \tilde{Q}_n(\alpha)\, Q_n(\alpha) = 0 = w_n\,\alpha^n ,$$

d'où, soit $\alpha = 0$, soit $Q_n(0) = 0$, ce qui n'est pas vérifié. Donc les zéros de $Q_n + z\tilde{A}_n\, f_{n+1}$ dans $|z| \leq 1$ sont exactement les pôles de f . D'après ( ) alors

$$\mathfrak{L}|Q_n + z\tilde{A}_n\, f_{n+1}| = |\theta_1\,\theta_2 \ldots \theta_p| .$$

Donc

$$|\theta_1 \ldots \theta_p|^2\, \mathfrak{L}(1 - |f|^2) = w_n\, \mathfrak{L}(1 - |f_{n+1}|^2) . \tag{13}$$

Mais si g est holomorphe, et appartient à $\mathcal{M}_0$, d'après (11),

$$w(g) = \prod_{n=0}^{\infty}(1 - |\gamma_n(g)|^2) .$$

or $w(f) = w_n \prod_{j=n+1}^{\infty}(1 - |\gamma_j(f)|^2) = w_n \prod_{j=0}^{\infty}(1 - |\gamma_{n+j+1}(f)|^2)$, or f_{n+1} est holophorme et appartient à $\mathcal{M}_0$; de plus, d'après (12),

$$\gamma_{n+1+j}(f) = \gamma_j(f_{n+1}) .$$

Donc

$$w(f_{n+1}) = \prod_{j=0}^{\infty}(1 - |\gamma_j(f_{n+1}|^2) = \prod_{j=0}^{\infty}(1 - |\gamma_{n+1+j}(f)|^2) .$$

Donc

$$w(f) = w_n \cdot w(f_{n+1}) .$$

Il suffit donc de démontrer que $\mathfrak{L}(1 - |g|^2) = w(g)$ si $g \in \mathcal{M}_0$. Le théorème résulte donc du lemme suivant :

LEMME. - <u>Soit</u> $g \in \mathcal{M}_0$, <u>alors</u>

$$w(g) = \lim_{n\to\infty} w_n(g) = \mathfrak{L}(1 - |g|^2) .$$

<u>Démonstration</u>. - D'après l'égalité (13), on a $\mathfrak{L}(1 - |g|^2) \leq w_n(g)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Donc

$$\mathfrak{L}(1 - |g|^2) \leq w(g) .$$

Soient A_n et Q_n associés à g , alors Q_n n'a pas de zéro dans $|z| \leq 1$. Donc $\mathfrak{L}(|Q_n|^2) = 1$. Or

$$w_n(g) = \mathfrak{L}(|Q_n|^2 - |A_n|^2) = \mathfrak{L}\left(1 - \frac{|A_n|^2}{|Q_n|^2}\right) .$$

Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ vérifiant $P(0) = 1$. D'après (7),

$$w_n(g) \leq \mathfrak{a}(|P|^2 - |\frac{PA_n}{Q_n}|^2) = \mathfrak{a}(|P|^2) - \mathfrak{a}|\frac{PA_n}{Q_n}|^2 .$$

Or, si $gP = v_0 + v_1 z + \dots + v_n z^n + v_{n+1} z^{n+1} + \dots$, alors, d'après (1),

$$\frac{PA_n}{Q_n} = v_0 + v_1 z + \dots + v_n z^n + v'_{n+1} z^{n+1} + \dots$$

Or l'égalité de Parceval implique

$$\alpha(|\frac{PA_n}{Q_n}|^2) \geqslant |v_0|^2 + \dots + |v_n|^2 .$$

Donc

$$w(g) \leqslant w_n(g) \leqslant \alpha(|P|^2) - (v_0^2 + \dots + v_n^2) .$$

Soit $w(g) \leqslant \alpha(|P|^2) - (|v_0|^2 + \dots + |v_n|^2)$ et, en faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$w(g) \leqslant \alpha(|P|^2 - \sum_{n=0}^{\infty} |v_i|^2 = \alpha|P|^2 - \alpha(|gP|^2) .$$

Soit, pour tout $P \in \mathbb{C}[z]$ vérifiant $P(0) = 1$,

$$w(g) \leqslant \alpha(|P|^2(1 - |g|^2)$$

et, d'après (7),

$$w(g) \leqslant \mathfrak{L}(1 - |g|^2) .$$

COROLLAIRE 1. - Si $f = \frac{A}{Q}$ est une fraction rationnelle avec A et Q premiers entre eux et si $\Omega(z) = (Q(z)\tilde{Q}(z) - A(z)\tilde{A}(z))/z^n$, où $\Omega(z)$ est un polynôme vérifiant $\Omega(0) \neq 0$, alors

$$w(f) = \frac{|\Omega(0)|}{|Q(0)|^2} \prod_{\alpha} \max(|\alpha| , 1)$$

où le produit est sur les racines de $\Omega(z)$.

En effet, on a $|\Omega| = |Q|^2(1 - |f|^2)$ si $|z| = 1$. Donc

$$\mathfrak{L}(|\Omega|) = \mathfrak{L}(|Q|^2) \mathfrak{L}(1 - |f|^2) .$$

Or $\mathfrak{L}(|Q|)^2 = \theta_1^2 \dots \theta_p^2 |Q(0)|^2$, d'après (6).

Donc

$$w(f) = \frac{\mathfrak{L}(|\Omega|)}{|Q(0)|^2} = \frac{|\Omega(0)|}{|Q(0)|^2} \prod_{\alpha} \max(|\alpha| , 1)$$

car $\Omega(z)$ est un polynôme réciproque.

COROLLAIRE 2. - Soit δ_n les déterminants

$$\delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & u_0 & \dots & u_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & u_0 \dots & u_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \dots & u_0 \\ \overline{u}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \overline{u}_1 & \overline{u}_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ \overline{u}_n & \overline{u}_{n-1} & \overline{u}_{n-2} & \dots & \overline{u}_0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

et soit $f \in \mathcal{T}_p$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} = (1 - |f|^2)\theta_1^2 \dots \theta_p^2 .$$

Un calcul simple montre que $w_n = \delta_n/\delta_{n-1}$ si on calcule explicitement A_n et Q_n à l'aide des formules de définition.

Application

Définition. - On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des fractions rationnelles vérifiant les propriétés suivantes :

1° $f = A(z)/Q(z)$ avec $A(z)$ et $Q(z) \in \mathbb{Z}[z]$,

2° $Q(0) = 1$,

3° $A(0) > 0$,

4° $A(z)/Q(z)$ a un seul pôle $\frac{1}{\theta}$ dans $|z| \leqslant 1$ avec $|\frac{1}{\theta}| < 1$,

5° $|A(z)/Q(z)| \leqslant 1$ si $|z| = 1$.

Remarque. - Tout nombre de Pisot θ est associé à au moins un élément de $\mathcal{E}$ ayant $1/\theta$ pour pôle.

Définition. - Si $\theta \in S$, on notera

$$w(\theta) = \sup(w(f),\ f \in \mathcal{E},\ f \text{ ayant } \frac{1}{\theta} \text{ pour pôle}) .$$

THÉORÈME. - Si θ S, alors $w(\theta) \leqslant \theta^2 - 1$.

Démonstration. - Soit $f \in \mathcal{E}$ associée à θ, alors $g = f \times ((1-\theta z)/(\theta - z))$ est holomorphe et de module $\leqslant 1$ si $|z| = 1$. Or

$$\mathcal{L}(1 - |g|^2) = \mathcal{L}(1 - |f|^2) = \frac{w(f)}{\theta^2} .$$

Donc

$$w(f) = \theta^2 \mathcal{L}(1 - |g|^2) = \theta^2 w(g) \leqslant \theta^2 w_0(g)$$

mais $w_0(g) = 1 - (u_0^2/\theta^2)$ si $f = u_0 + u_1 z + \ldots$

Or $u_0 \in \underset{\sim}{Z}$, donc $w_0(g) \leqslant 1 - (1/\theta^2)$.

Soit $w(f) \leqslant \theta^2 - 1$, donc $w(\theta) \leqslant \theta^2 - 1$.

Définition. - Si $\theta \in S$, on note $h(\theta) = \max(h , \theta \in S^{(h)})$.

THÉORÈME. - Si $\theta \in S$, alors $h(\theta) \leqslant w(\theta)$.

Démonstration. - Un résultat de Marthe GRANDET ([3], p. 24) montre que si $\theta \in S^{(h)}$, on peut aussi lui associer une fraction rationnelle f de $\mathcal{E}$ telle que, si $n \geqslant n_0$, $w_n(f) - h \geqslant 0$.

Or $\theta \in S^{(h(\theta))}$, donc on peut lui associer une fraction rationnelle f de $\mathcal{E}$ telle que, pour $n \geqslant n_0$, $w_n(f) \geqslant h(\theta)$. Donc $w(f) \geqslant h(\theta)$. Or, par définition, $w(f) \leqslant w(\theta)$.

THÉORÈME. - $\min S^{(h)} \geqslant (h + 1)^{1/2}$.

Démonstration. - Soit θ le minimum de $S^{(h)}$, alors

$$h \leqslant h(\theta) \leqslant w(\theta) \leqslant \theta^2 - 1 .$$

Donc $\theta \geqslant (h + 1)^{1/2}$.

Remarque. - Soit $f = 1/(1 - kz)$, alors $\Omega(z) = - k(1 - kz + k^2)$. Donc $w(f) = k(k + (k^2 - 4)^{1/2})/2$. Donc $[w(\theta)] \geqslant k^2 - 2$. Donc dans le meilleur des cas c'est-à-dire si $h(\theta) = [w(\theta)]$ alors $h(k) \geqslant k^2 - 2$; donc il n'est pas exclu que $k \in S^{(k-2)}$. En fait, de façon plus précise, on peut démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME. - Soit $k \in \underset{\sim}{N}$, vérifiant $k \geqslant 2$, alors $[w(k)] = k^2 - 2$.

Remarque. - Sachant que $k \in S^{(k-1)}$, on obtient alors

$$k - 1 \leqslant h(k) \leqslant k^2 - 2 .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOYD (D. W.). - Small Salem numbers, Duke math. J., t. 44, 1977, p. 315-328.

[2] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Sur les dérivés successifs d'un ensemble fermés d'entiers algébriques, Bull. Sc. math., Série 2, t. 77, 1953, p. 129-136.

[3] GRANDET-HUGO (M.). - Ensembles fermés d'entiers algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., Série 3, t. 82, 1965, p. 1-35.

[4] HARDY (G. H.), LITTLEWOOD (J. E.) and POLYA (G.). - Inequalities. - Cambridge, at Cambridge University Press, 1934.

[5] HOFFMAN (K.). - Banach spaces of analytic functions. - Englewood Cliffs, Prentice Hall 1962 (Prentice Hall Series in modern Analysis).