Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Michel Mendès France

Sur le spectre de Lagrange d'un ensemble de nombres réels

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, n° 2 (1977-1978), exp. n° 30, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_2_A5_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
19e année, 1977/78, n° 30, 5 p.
6 mars 1978

SUR LE SPECTRE DE LAGRANGE D'UN ENSEMBLE DE NOMBRES RÉELS

par Michel MENDÈS FRANCE

Résumé. - La constante de Lagrange $L(\xi)$ d'un nombre réel ξ est définie par

$$L(\xi) = \limsup_{q\to\infty}(q\|q\xi\|)^{-1}$$

où $\|\ldots\|$ désigne la distance sur le tore. Nous étudions ici le spectre de $S \subset \mathbb{R}$

$$L(S) = \{L(\xi) \ ; \ \xi \in S\}$$

pour certains S (sous-corps de $\mathbb{R}$, corps de nombres quadratiques).

1. Les résultats.

Tous les résultats exposés ci-dessous font essentiellement partie d'un article à paraître, écrit conjointement avec T. CUSICK [6], complété par une récente étude de Henri COHEN non encore publiée.

Soit ξ un nombre irrationnel. La constante de Lagrange $L(\xi)$ est la borne supérieure précise des nombres c tels que l'inégalité

$$|\xi - \frac{a}{q}| \leqslant \frac{1}{cq^2}$$

admette une infinité de solutions en nombres entiers a, q. Les résultats suivants sont bien connus :

(i) $L(\xi) \geqslant \sqrt{5}$

(ii) $L(\xi) = \limsup_{q\to\infty}(q\|q\xi\|)^{-1}$,

(iii) Si $[c_0 , c_1 , c_2 , \ldots]$ représente la fraction continue de ξ , alors

$$L(\xi) = \limsup_{j\to\infty}([c_{j+1} , c_{j+2} , \ldots] + [0 , c_j , c_{j-1} , \ldots]) .$$

Si $\xi \in \mathbb{Q}$, on convient de poser $L(\xi) = +\infty$.

Soit $S \subset \mathbb{R}$. Le spectre de Lagrange de S est l'ensemble

$$L(S) = \{L(\xi) \ ; \ \xi \in S\} .$$

Remarque. - Certains lecteurs pourraient être tentés de remplacer le nom de "Lagrange" par celui de "Markov". D'après CUSICK, KINNEY, PITCHER ([5], [9], [10]) et d'autres, la constante de Markov de ξ serait

$$M(\xi) = \sup(q\|q\xi\|)^{-1} .$$

Il existe bien entendu, une relation entre les spectres de Lagrange et Markov (voir par exemple [5]).

Nous établissons ici les théorèmes suivants.

THÉORÈME 1. - Supposons que $\mathbb{Q}^* S + \mathbb{Q} \subset S$. Alors

$$L(S) = \underset{\sim}{N}.L(S) \quad (\underset{\sim}{N} = \{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \ldots\})\ .$$

THÉORÈME 2. - <u>Soit</u> $d \geqslant 2$ <u>un entier sans facteur carré. Il existe un ensemble</u> $A(d)$ <u>de nombres rationnels tel que</u>

$$L(\underset{\sim}{Q}(\sqrt{d})) = \sqrt{d}.A(d)\ \underset{\sim}{N}\ .$$

Dans [6], nous posions la question de savoir si $A(d)$ est fini ou non. Dernièrement, Henri COHEN a résolu le problème pour $d = 5$, $A(5)$ est infini. Le point de départ de sa solution consiste à observer que, pour q entier impair, on a

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\, L\left(\frac{1 + q\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{1}{2}\, q \quad \text{ou} \quad 2q\ .$$

Donc, en particulier,

$$A(d) \supset \left\{\frac{1}{2}\, p\ ;\quad p \ \text{premier},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\, L\left(\frac{1 + p\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{1}{2}\, p\right\} = B(5)\ .$$

H. COHEN caractérise alors les nombres premiers p qui tombent dans l'ensemble, et montre que, parmi eux, se trouvent les nombres premiers réprésentés par certai formes quadratiques définies positives. Le théorème de Tchebotareff [ČEBOTAREV] permet alors de conclure que la famille des nombres premiers $p \in 2B(5)$ est infinie (et même possède une densité inférieure strictement positive). $2B(5)$ contient tous les nombres premiers représentés par l'une ou l'autre des deux formes $2X^2 + XY + 17Y^2$, $4X^2 + 3XY + 9Y^2$ et qui ne sont pas divisibles par 3.

THEOREME 3. - <u>Soit</u> $d \geqslant 2$ <u>un entier sans facteur carré. Soit</u> $I(\sqrt{d})$ <u>l'anneau des entiers du corps</u> $\underset{\sim}{Q}(\sqrt{d})$. <u>On a</u>

$$L(I(\sqrt{d})) = \begin{cases} \sqrt{d}\ \underset{\sim}{N} & \underline{\text{si}}\ \ d \equiv 1 \pmod 4 \\ 2\sqrt{d}\ \underset{\sim}{N} & \underline{\text{si}}\ \ d \equiv 2\ \ \underline{\text{ou}}\ \ 3 \pmod 4 \end{cases}\ .$$

2. Preuve du théorème 1.

Grâce aux diverses définitions équivalentes de la constante de Lagrange, on établit aisément le lemme suivant.

LEMME 1.

(i) <u>Si</u> a , b , c , d <u>sont quatre entiers tels que</u> $ad - bc = \pm 1$, <u>alors</u>

$$L\left(\frac{a\xi + b}{c\xi + d}\right) = L(\xi)\ .$$

(ii) <u>Si</u> $h \neq 0$ <u>est entier, alors</u>

$$L(h\xi) \leqslant |h|\, L(\xi)\ .$$

(iii) <u>Si</u> d_1 <u>et</u> d_2 <u>sont deux entiers positifs, et</u> a <u>un entier arbitraire, alors</u>

$$L\left(\frac{d_1\ \xi + a}{d_2}\right) \leqslant d_1\ d_2\ L(\xi)\ .$$

LEMME 2. - <u>Soient</u> ξ <u>un nombre réel, et</u> $n \geqslant 1$ <u>un nombre entier. Il existe deux</u>

<u>diviseurs</u> d_1 <u>et</u> $d_2 = n/d_1$ <u>de</u> n , <u>et un entier</u> $a \in \{0 , 1 , \dots , d_1 - 1\}$ <u>tels que</u>

$$L(\frac{d_1 \xi + a}{d_2}) \geqslant nL(\xi) .$$

<u>Preuve</u>. - Ce résultat est pratiquement établi dans [7] lorsque $n = p$ est premier. Il suffit d'y changer θ en $\frac{1}{p}\xi$ et de partir de l'inégalité

$$|\xi - \frac{a_n}{q_n}| \leqslant \frac{1}{cq_n^2} , \quad c < L(\xi)$$

plutôt que de

$$|\xi - \frac{a_n}{q_n}| \leqslant \frac{1}{q_n^2} .$$

L'extension du résultat, au cas où n est composé, se fait sans peine grâce à une récurrence sur la factorisation de n en facteurs premiers. Le détail de la démonstration est reproduit dans notre article [6].

COROLLAIRE. - <u>Pour tout nombre réel</u> ξ , <u>et tout entier</u> $n \geqslant 1$,

$$\max_{d_1, d_2, a} L(\frac{d_1 \xi + a}{d_2}) = nL(\xi) ,$$

<u>où le maximum est étendu à tous les diviseurs</u> d_1 <u>et</u> $d_2 = n/d_1$ <u>de</u> n , <u>et à tous les entiers</u> a .

Le théorème 1 s'ensuit trivialement.

3. Preuve des théorèmes 2 et 3.

Soit $\xi \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ un nombre quadratique réel irrationnel. Son développement en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang

$$\xi = [c_0 , c_1 , \dots , c_k , \overline{a_1 , a_2 , \dots , a_s}]$$

(la barre désigne la période et signifie que le mot $a_1 , \dots , a_s$ doit être répété indéfiniment). La constante de Lagrange s'écrit donc

$$L(\xi) = \max_{1 \leqslant j \leqslant s} ([\overline{a_j , a_{j+1} , \dots , a_{j+s-1}}] + [0 , \overline{a_{j+s-1} , \dots , a_j}]) .$$

Sans perte de généralité, on peut écrire

$$L(\xi) = [\overline{a_1 , a_2 , \dots , a_s}] + [0 , \overline{a_s , a_{s-1} , \dots , a_1}] .$$

Soit α la valeur de $[\overline{a_1 , \dots , a_s}]$. Alors $\alpha = (a + b\sqrt{d})/c$, où a , b , c sont entiers, premiers entre eux dans leur ensemble. D'après un théorème classique de GALOIS [8], nous avons

$$[0 , a_s , a_{s-1} , \dots , a_1] = - \frac{a - b\sqrt{d}}{c} ,$$

de sorte que

$$L(\xi) = \frac{2b}{c}\sqrt{d} .$$

Cette égalité, jointe au théorème 1 établit le théorème 2.

LEMME 3. - Soit $d \geqslant 2$ un entier sans facteur carré.

(i) Soient a , $b \in \mathbb{Z}$. Tout nombre équivalent à $a + b\sqrt{d}$ admet une représentation de la forme

$$\frac{a' + b\sqrt{d}}{c'} , \quad a' , c' \in \mathbb{Z} .$$

(ii) Si $d \equiv 1 \pmod 4$, tout nombre équivalent à $(a = b\sqrt{d})/2$, $a \equiv b \equiv 1 \pmod 2$ admet une représentation de la forme $(a' + b\sqrt{d})/2c'$, $a , c' \in \mathbb{Z}$.

La preuve est élémentaire, elle est laissée au soin du lecteur (voir [6]).

Soit maintenant $\xi \in I(\sqrt{d})$. Supposons $d \equiv 2$ ou $3 \pmod 4$. Alors $\xi = a + b\sqrt{d}$, $a , b \in \mathbb{Z}$. Soit $a_1 , a_2 , \ldots , a_s$ la période du développement de ξ .

On pose

$$\alpha_i = [a_i , a_{i+1} , \ldots , a_{i+s-1}] , \quad \alpha_i^* = - [0 , \overline{a_{i+s-1} , \ldots , a_i}] .$$

On sait que $L(\xi) = \max_{1 \leqslant i \leqslant s}(\alpha_i - \alpha_i^*)$, et que α_i est équivalent à ξ . D'après le lemme précédent, nous avons

$$\alpha_i = \frac{a_i + b\sqrt{d}}{c_i} ,$$

donc

$$L(\xi) = 2b\sqrt{d}/\min_{1 \leqslant i \leqslant s} |c_i| . \tag{1}$$

Mais, de toute évidence, $\min_{1 \leqslant i \leqslant s} |c_i| = 1$ puisque le "dénominateur" de ξ est 1 . Donc $L(a + b\sqrt{d}) = 2b\sqrt{d}$. Cela établit la seconde partie du théorème 3. La première partie s'établit de même.

RÉFÉRENCES

La liste qui suit n'est pas exhaustive. Elle correspond aux articles traitant de sujets voisins, que j'ai trouvés au hasard d'une recherche non systématique.

[1] BUMBY (R. T.). - The Markov spectrum, "Diophantine approximation and its applications", [1972. Whashington], p. 25-58. - New York, Academic Press, 1972.

[2] BUMBY (R. T.). - Structure of the Markoff spectrum below $\sqrt{12}$, Acta Arithm., Warszawa, t. 29, 1976, p. 299-307.

[3] CASSELS (J. W. S.). - An introduction to Diophantine approximation, Cambridge, at the University Press, 1957 (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics, 45).

[4] CUSICK (T. W.). - The largest gaps in the lower Markoff spectrum, Duke math. J., t. 41, 1974, p. 453-463.

[5] CUSICK (T. W.). - The connection between the Lagrange and Markoff spectra, Duke math. J., t. 42, 1975, p. 507-517.

[6] CUSICK (T. W.) et MENDÈS FRANCE (M.). - The Lagrange spectrum of a set, Acta Arithm., Warszawa (à paraître).

[7] DAVENPORT (H.). - A remark on continued fractions, Michigan math. J., t. 11, 1964, p. 343-344.

[8] GALOIS (E.). - Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques, Annales Math. pures et appl., t. 19, 1828-1829, p. 294-299.

[9] KINNEY (J. R.) and PITCHER (T. S.). - The Hausdorff-Besicovich dimension of the level sets of Perron's modular function, Trans. Amer. math. Soc., t. 124, 1966, p. 122-130.

[10] KINNEY (J. R.) and PITCHER (T. S.). - On the lower range of Perron's modular function, Canad. J. Math., t. 21, 1969, p. 808-816.

[11] KOKSMA (J. F.). - Diophantische Approximationen. - Berlin, J. Springer, 1936 (Ergebnisse der Mathematik, 4, Band 4).

[12] HALL (M. Jr). - The Markoff spectrum, Acta Arithm., Warszawa, t. 18, 1971, p. 387-399.

[13] MENDÈS FRANCE (M.). - On a theorem of Davenport concerning continued fractions, Mathematika, London, t. 23, 1976, p. 136-141.

[14] SCHMIDT (A. L.). - Diophantine approximation of complex numbers, Acta Math., Uppsala, t. 134, 1975, p. 1-85.

(Texte reçu le 6 mars 1978)

Michel MENDÈS FRANCE
Mathématiques
Université de Bordeaux-I
351 cours de la libération
33405 TALENCE

NOTE [ajoutée à la correction des épreuves]. - Tout récemment, Steve WILSON a montré que $A(d)$ est infini pour tout d.