Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

PIERRE BARRUCAND

Fonctions associées aux produits eulériens

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, nº 1 (1977-1978), exp. nº 20, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_1_A17_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres).
19e année, 1976/77, n° 20, 13 p.

6 janvier 1978

FONCTIONS ASSOCIÉES AUX PRODUITS EULÉRIENS

par Pierre BARRUCAND

Résumé. - On établit beaucoup de realtions relatives à des produits eulériens, en particulier, les fonctions ζ de Dedekind et les fonctions L d'Artin, notamment, le comportement de fonctions définies par des développements en produits d'Euler associées à ces fonctions.

I. Notations et généralités.

1. Généralités.

M : ensemble des fonctions méromorphes si $Re(s) > 0$.

H_k : ensemble des fonctions holomorphes et sans zéro si $Re(s) > 1/k$.

$H_k(s)$: un élément quelconque de H_k (peut donc définir plusieurs fonctions distinctes).

S : ensemble des fonctions $\{F(x)\}$ admettant une représentation

(I.1.1) $$F(x) = 1 + \sum_1^\infty F_n\, x^n \sim F(x) \in S \ .$$

S_0 : sous-ensemble de S tel que

(I.1.2) $$F(x) = 1 + \sum_1^\infty F_n\, x^n \ ; \quad \forall\, n \ , \quad F_n \in Z \sim F(x) \in S_0 \ .$$

Il est connu que si $F(x) \in S$, on a des coefficients $h(n)$ tels que

(I.1.3) $$F(x) = \prod_{n=1}^\infty (1 - x^n)^{-h(n)} \ ;$$

soit, par differenciation logarithmique,

(I.1.4) $$\frac{xF'(x)}{F(x)} = \sum_1^\infty nh(n)\, x^n \ .$$

Donc, si

(I.1.5) $$x\frac{F'(x)}{F(x)} = \sum_1^\infty g(n)\, x^n \ ,$$

on a

(I.1.6) $$nh(n) = \sum_{dd'=n} \mu(d')\, g(d) \ ,$$

où $\mu(n)$ est la fonction classique de Möbius, et l'on sait que

(I.1.7) $$(F(x) \in S_0) \sim (\forall\, n \ , \ h(n) \in Z) \ .$$

2. Quelques notations.

P est l'ensemble des nombres premiers rationnels $\{p\}$. Si X $(X = A , B , C , \ldots)$ est une partie de P

(I.2.1) $$X(s) = \prod_{p\in X}(1 - p^{-s})^{-1} \; ; \quad X = A \; , \; B \; , \; \ldots$$

La classe E, classe des fonctions admettant la représentation, est définie par

(I.2.2) $$\Psi(s) = \prod_p F_p(p^{-s}) \; ; \quad \forall \; p \; , \quad F_p \in S \sim \Psi(s) \in E \; .$$

De même, la sous-classe E_0 est définie par

(I.2.3) $$\Psi(s) = \prod_p F_p(p^{-s}) \; ; \quad \forall \; p \; , \quad F_p \in S_0 \sim \Psi(s) \in E_0 \; .$$

Les fonctions $F_p(p^{-s})$ sont appelées facteurs locaux.

Nous noterons toujours $V(s)$ un produit d'un nombre fini de facteurs locaux ($V(s)$ ne désigne donc pas toujours la même fonction), et par $\psi^*(s)$, $\Psi = \zeta$, L, Φ, ... une fonction de E "amputée" d'un nombre fini de facteurs locaux.

3. Rappel sur les corps cubiques.([3] et [7]).

Dans un corps cubique K de discriminant Δ, P se décompose en 5 classes :

classe 1 : (p) est totalement décomposé dans K_3,

classe 2 : (p) est inerte,

classe 3 : $(\Delta/p) = -1$,

classe 4 : (p) est simplement ramifié,

classe 5 : (p) est totalement ramifié.

Si le groupe de Galois est cyclique, les classes 3 et 4 sont vides. Soient N la clôture galoisienne de K_3, et $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$, D étant le discriminant de K_2. On a alors, pour les discriminants et les fonctions ζ,

(I.3.1) $$\Delta = Df^2 \; ,$$

(I.3.2) $$\zeta_{K_2}(s) = \zeta(s)\; L(s) \; ,$$

(I.3.3) $$\zeta_{K_3}(s) = \zeta(s)\; \Phi(s) \; ; \quad \Phi \text{ est la fonction } L \text{ d'Artin;}$$

(I.3.4) $$\zeta_N(s) = \zeta(s)\; L(s)\; \Phi^2(s) \; .$$

Si Gal est cyclique, on a

(I.3.5) $$\Delta = f^2 \; ,$$

(I.3.6) $$\zeta_{K_3}(s) = \zeta(s)\; L_1^*(s)\; L_2^*(s) \; ,$$

L^* fonction L de Dirichlet avec caractères cubiques.

4. Autres notations.

En général, en notant K un corps algébrique quelconque, $\zeta_K(s)$ sera sa fonction ζ. De plus, nous définissons toujours

(I.4.1) $$L_D(s) = \sum_1^\infty (D/n)n^{-s} ,$$

(I.4.2) $$\Phi(s) = \sum \varphi(n)\ n^{-s} ,$$

une fonction L d'Artin (ceci <u>définit</u> les coefficients $\varphi(n)$).

(I.4.3) $$\Psi(s) = \sum \psi(n)\ n^{-s} ,$$

un <u>élément</u> de S , et les coefficients Z , d_k , ... , tels que

(I.4.4) $$\zeta_K(s) = \sum_1^\infty Z(n)\ n^{-s} ,$$

(I.4.5) $$[\zeta(s)]^k = \sum_1^\infty d_k(n)\ n^{-s} ,$$

(I.4.6) $$\zeta(s)\ L_D(s) = \sum_1^\infty \delta(n\ ,\ D)\ n^{-s} .$$

D'autre part, D désignera toujours un discriminant de corps quadratique, et Δ un discriminant en général.

II. Formules explicites. Cas simples

1. Formules générales.

RAMANUJAN ([8], p. 133-136), puis WILSON [11] ont publié les formules suivantes.

(II.1.1) $$\sum_1^\infty d_2^2(n)\ n^{-s} = \zeta^4(s)/\zeta(2s) ,$$

(II.1.2) $$\sum_1^\infty d^2(n\ ,\ -4)\ n^{-s} = \zeta^2(s)\ L_{-4}^2(s)/(\zeta(2s)(1 + 2^{-s})) .$$

P. BARRUCAND [1] a fourni, pour les fonctions L des corps cubiques non galoisiens, en utilisant les notations de (I.1.3) et (I.1.4),

(II.1.3) $$\sum \varphi^2(n)\ n^{-s} = \zeta(s)\ L_D(s)\ \Phi(s)\ V(s)/\zeta(2s)$$

($V(s)$ étant défini en (1.2)), et une formule analogue pour les corps cubiques cycliques. Il est aisé de généraliser.

Distribuons P en quatre classes A , B , C , D , $A \neq \emptyset$, et à chaque élément de A associons deux quantités $\omega_{p,1}$ et $\omega_{p,2}$. Soit alors,

(II.1.4) $$\omega_{p,3} = \omega_{p,1} + \omega_{p,2} ,\quad \omega_{p,4} = \omega_{p,1} - \omega_{p,2} ,$$

(II.1.5) $$R_j(s) = \prod_{p \in A}(1 - 2\cos\ \omega_{p,j}\ p^{-s} + p^{-2s})^{-1} ;\quad j = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,$$

(II.1.6) $$F_j(s) = R_j(s)\ B(2s)\ C(s) \overset{\text{def}}{=} \sum f_j(n)\ n^{-s} ;\quad j = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4 .$$

B et C étant définis en (I.2.1), observons que l'on a , trivialement,

(II.1.7) $$\zeta(s) = A(s)\ B(s)\ C(s)\ D(s) .$$

Maintenant, et suivant l'usage, soient $\{U_n(x)\}$ les polynômes de Čebyšev définis par

$$U_n(\cos\ \omega) = \sin(n + 1)\omega/\sin\ \omega .$$

On sait que l'on a

$$\frac{1 - x^2}{1 - 2x \cos \omega + x^2} = 1 + 2 \sum_1^\infty \cos n\omega \, x^n \ ,$$

$$\frac{1}{1 - 2x \cos \omega + x^2} = \sum_0^\infty U_n(\cos \omega) \, x^n \ .$$

De là, à partir de la relation trigonométrique

$$\cos(\omega \pm \omega') = \cos \omega \cos \omega' \mp \sin \omega \sin \omega \ ,$$

nous avons

(II.1.8)
$$\frac{1 - x^2}{(1 - 2x \cos(\omega + \omega') + x^2)(1 - 2x \cos(\omega - \omega') + x^2)} = \sum_0^\infty U_n(\cos \omega) \, U_n(\cos \omega') \, x^n \ .$$

Utilisant (II.1.8), facteur local par facteur local, nous trouvons

(II.1.9)
$$\sum_1^\infty f_1(n) \, f_2(n) \, n^{-s} = F_3(s) \, F_4(s) \, C(s) \, B(2s)/A(2s) \ ,$$

mais $R_3(s) \, R_4(s) = F_3(s) \, F_4(s)/B^2(2s) \, C^2(s)$.

D'où, finalement

(II.1.10)
$$\sum_1^\infty f_1(n) \, f_2(n) \, n^{-s} = \frac{F_3(s) \, F_4(s) \, C(2s) \, D(2s)}{\zeta(2s) \, C(s)} \ .$$

Tout l'intérêt de (II.1.10) réside dans les cas particuliers quand C et D se composent d'un nombre fini d'éléments, d'où

(II.1.11)
$$\sum_1^\infty f_1(n) \, f_2(n) \, n^{-s} = \frac{F_3(s) \, F_4(s)}{\zeta(2s)} \, V(s) \ .$$

2. Exemples simples.

Si nous prenons $B = C = D = \emptyset$, $A = P$, $\omega_{p,1} = \omega_{p,2} = 0$ (pour tous les p), nous retrouvons (II.1.1).

Si

$p \in A \sim (D/p) = 1$, $p \in B \sim (D/p) = -1$,

$p \in C \sim (D/p) = 0$, $D = \emptyset$,

on a

(II.2.1)
$$\sum d^2(n \, , \, D) \, n^{-s} = \zeta^2(s) \, L_D^2(s) \prod_{p|D}(1 + p^{-s})^{-1}/\zeta(2s) \ ,$$

généralisation légère de (II.1.2).

3. Corps diédraux.

Un corps diédral K (non galoisien, donc) de degré premier $\ell = 2\lambda + 1$ aura pour discriminant $\Delta = (Df^2)$, et

(II.3.1)
$$\zeta_K(s) = \zeta(s) \prod_{j=1}^{\lambda} \Phi_j(s) \ .$$

On a

$p \in A \sim (Df^2/p) = 1$, $p \in B \sim (Df^2/p) = -1$,

$p \in D \sim p|f$, $p \in C \sim p|D$, $p \nmid f$.

On définit alors des entiers m_p , $0 \leqslant m_p \leqslant \lambda$, tels que

(II.3.2) $$\Phi_j(s) = \prod_A (1 - 2\cos \frac{2\pi j m_p}{\ell} p^{-s} + p^{-2s})^{-1} B(2s)\, C(s) ,$$

formule qui nous permet de définir $\Phi_j(s)$, pour tout j .

(II.3.3) $$\Phi_{\ell+j}(s) = \Phi_{\ell-j}(s) = \Phi_j(s) , \quad \Phi_0(s) = \zeta(s)\, L_D(s)\, V(s) ,$$

D'où, par application de (II.1.11),

(II.3.4) $$\sum \varphi_j(n)\, \varphi_k(n)\, n^{-s} = \Phi_{j+k}(s)\, \Phi_{j-k}(s)\, V(s)/\zeta(2s) ,$$

(II.3.5) $$\sum \varphi_j^2(n)\, n^{-s} = \zeta(s)\, L_D(s)\, \Phi_{2j}(s)\, V(s)/\zeta(2s) ,$$

(II.3.6) $$\sum d(n , D)\, \varphi_j(n)\, n^{-s} = \Phi_j^2(s)\, V(s)/\zeta(2s) .$$

(II.1.3) est un cas particulier de (II.3.5).

Détermination des m_p . - Dans $Q(\sqrt{D})$, chaque élément de A se décompose en produit de 2 idéaux conjugués $p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$. A chaque idéal premier de $Q(\sqrt{D})$, on associe un "caractère de classe" selon la structure du groupe des formes quadratiques de discriminant Df^2 . Soient

$$X(\mathfrak{p}) = \exp(2\pi i m_p/\ell) , \quad X(\mathfrak{p}') = \exp(- 2\pi i m_p/\ell)$$

(le système des caractères n'est pas toujours unique, dans ce cas il y a plusieurs corps non conjugués de discriminant $(Df^2)^\lambda$. Par exemple, $\ell = 5$, $D = - 47$, $\Delta = 47^2$

$m_p = 0$, si $p = x^2 \pm xy + 12y^2$

$m_p = 1$, si $p = 2x^2 \pm xy + 6y^2$

$m_p = 2$, si $p = 3x^2 \pm xy + 4y^2$.

4. Grossen-Charakter de Hecke.

HECKE ([4], p. 215-230, p. 249-287) a défini des "caractères de magnitude" et une fonction $\zeta_K(s , \lambda^m)$, satisfaisant une équation fonctionnelle assez simpl quand K est un corps quadratique de nombre de classe égal à 1.

(II.4.1) $$\zeta(s , \lambda^m) = \prod_A (1 - 2\cos m\omega_p^* p^{-s} + p^{-2s})^{-1} B(2s)\, C(s)$$

avec $p \in A \sim (D/p) = 1$, $p \in B \sim (D/p) = - 1$, $p \in C \sim (D/p) = 0$, les $\{\omega_p^*\}$ dépendant de la représentation $4p = x^2 - Dy^2$, et de l'unité fondamentale de $Q(\sqrt{D})$. Soit, alors

(II.4.2) $$\zeta(s , \lambda^m) \overset{\text{def}}{=} \sum_1^\infty Z(n , \lambda^m)\, n^{-s} ,$$

(II.4.3) $$\zeta(s , \lambda^0) = \zeta(s)\, L_D(s) .$$

Donc,

(II.4.4) $$\sum Z(n , \lambda^m)\, Z(n , \lambda^{m'})\, n^{-s} = \frac{V(s)\, \zeta(s , \lambda^{m+m'})\, \zeta(s , \lambda^{m-m'})}{\zeta(2s)} ,$$

(II.4.5) $$\sum Z^2(n , \lambda^m)\, n^{-s} = V(s)\, L_D(s)\, \zeta(s)\, \zeta(s , \lambda^{2m})/\zeta(2s) ,$$

(II.4.6) $$\sum d(n , D)\, Z(n , \lambda^m)\, n^{-s} = V(s)\, \zeta^2(s , \lambda^m)/\zeta(2s) .$$

5. Fonctions modulaires.

Les fonctions modulaires (évitons le mot "formes") de dimension négative (c'est-à-dire de poids positif) peuvent avoir des coefficients multiplicatifs. On a alors des fonctions de type

$$g(q) \overset{\text{def}}{=} \sum g(n)\, q^n \ ; \quad q = \exp(\pi i T) \ ; \quad g(nm) = g(n)\, g(m) \quad \text{si} \quad (m\ ,\ n) = 1\ .$$

Des manipulations faciles permettent alors d'obtenir des informations sur $\sum_1^\infty g^2(n)\, n^{-s}$ et $\sum g^2(n)\, q^n$ (qui n'est pas une fonction modulaire).
Par exemple, pour la fonction $T(n)$ de Ramanujan, en définissant ω_p par $2\cos\omega_p = T(p)\, p^{-11/2}$, on obtient l'essentiel des résultats obtenus par RANKIN (avec $A = P$). On peut aussi considérer la fonction $\chi_k(n)$ de Glaisher qui se rattache d'ailleurs à la théorie de Hecke par les caractères de magnitude.

6. Corps biquadratiques (bicycliques).

Partons de

$$\text{(II.6.1)} \qquad \zeta(s)\, L_{D_j}(s) = \sum d(n\ ,\ D_j)\, n^{-s} \ ; \quad j = 1\ ,\ 2\ , \quad D_1 \neq D_2\ ,$$

et soit D_3 tel que $D_1\, D_2 = D_3\, m^2$. Donc D_3 est le discriminant de $\underset{\sim}{Q}(\sqrt{D_1\, D_2})$.
La fonction ζ de $K = \underset{\sim}{Q}(\sqrt{D_1}\ ,\ \sqrt{D_2})$ est alors

$$\text{(II.6.2)} \qquad \zeta_K(s) = \zeta(s)\, L_{D_1}(s)\, L_{D_2}(s)\, L_{D_3}(s)\ .$$

Soit $F_{D_1,D_2}(s) = \sum_1^\infty d(n\ ,\ D_1)\, d(n\ ,\ D_2)\, n^{-s}$.

Pour obtenir une formule explicite, nous devons employer une méthode un peu différente, distribuant les premiers <u>non diviseurs</u> de $D_1\, D_2 = D_3\, m^2$ en 4 classes:
$p \in A \sim (D_1/p) = (D_2/p) = 1$, $p \in B_1 \sim (D_1/p) = -(D_2/p) = 1$,
$p \in B_2 \sim (D_2/p) = -(D_1/p) = 1$, $p \in B_3 \sim (D_1/p) = (D_2/p) = -1$.
Calculant, alors, explicitement les facteurs locaux pour les 4 classes A , B_1 , B_2 , B_3 , nous avons

$$F_{D_1,D_2}(s) = \prod_A \frac{1 - p^{-2s}}{(1 - p^{-s})^4} \prod_{B_1} \frac{1 + p^{-2s}}{(1 - p^{-2s})^2} \prod_{B_2} \frac{1 + p^{-2s}}{(1 - p^{-2s})^2} \prod_{B_3} \frac{(1 - p^{-2s})^2}{(1 - p^{-2s})^2}\ .$$

D'où, en rétablissant les facteurs locaux correspondant à $p \mid D_1\, D_2$, nous avons

$$\text{(II.6.3)} \qquad \sum_1^\infty d(n\ ,\ D_1)\, d(n\ ,\ D_2)\, n^{-1} = V(s)\, \zeta(s)\, L_{D_1}(s)\, L_{D_2}(s)\, L_{D_3}(s)/L_{D_3}(2s)\ ,$$

$$\text{(II.6.4)} \qquad \sum d(n\ ,\ D_1)\, d(n\ ,\ D_2)\, n^{-s} = V(s)\, \zeta_K(s)/L_{D_3}(2s)\ .$$

A noter le "diviseur" $L_{D_3}(2s)$.

7. Corps bicubiques.

Soient deux corps cubiques K_1 , K_2 , de discriminant $Df_1^2 = \Delta_1$ et Df_2^2 . Le corps composé $K_1 K_2$ contient alors deux autres corps cubiques K_3 et K_4. Ces corps sont faciles à déterminer.

(a) Si $D = -3$, $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{m_1})$, $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{m_2}) \Longrightarrow K_3 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{m_1 m_2})$, $K_4 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{m_1 m_2^2})$.

(b) Si $D \neq -3$, il existe, alors, 2 éléments de $\mathbb{Q}(\sqrt{-3D})$

$$\mu_1 = \alpha_1 + \beta_1 \sqrt{-3D}\ , \quad \mu_2 = \alpha_2 + \beta_2 \sqrt{-3D}$$

tels que

$$K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{\mu_1} + \sqrt[3]{\mu'_2})\ , \quad K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{\mu_2} + \sqrt[3]{\mu'_2})$$

impliquent

$$K_3 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{\mu_1\ \mu_2} + \sqrt[3]{\mu'_1\ \mu'_2})\ , \quad K_4 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{\mu_1\ \mu'_2} + \sqrt[3]{\mu'_1\ \mu_2})\ .$$

A un nombre fini d'exceptions près, les premiers, appartenant à la classe 3 dans K_1, appartiennent à cette classe dans K_2, K_3 et K_4. Il y a lieu alors de procéder à une étude des autres possibilités. Si (p) appartient à la classe 1 dans K_1, et à la classe 2 dans K_2, il appartient aussi à la classe 2 dans K_3 et K_4. Par une méthode analogue à celle employée pour les corps biquadratiques bicycliques, on trouve alors, en notant

(II.7.1) $\Phi_j(s) = \sum \varphi_j(n)\, n^{-s}$, fonction d'Artin de K_j, $j = 1, 2, 3, 4$,

$$\sum \varphi_1(n)\ \varphi_2(n)\ n^{-s} = \frac{\Phi_3(s)\ \Phi_4(s)\ V(s)}{\zeta(2s)}$$

Note. – Dans tous les cas, le calcul explicite de $V(s)$ (indéterminé ici) est fastidieux, mais sans difficulté.

III. Cas général.

1. Une formule générale.

Considérons maintenant une fonction de la classe E (formule (II.1.1)), en utilisant pour la représentation des facteurs locaux $F_p(p^{-s})$ la représentation (I.1.3).

(III.1.1) $$F_p(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-h(n,p)}\ .$$

Nous avons

(III.1.2) $$\Psi(s) = \sum \psi(n)\ n^{-s} = \prod_p \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p^{-ns})^{-h(n,p)}\ .$$

Soit

(III.1.3) $$\Psi(s) = \prod (1 - p^{-s})^{-h(1,p)}\ H_2(s)\ ,$$

(III.1.4) $$\Psi(s) = \prod (1 - p^{-s})^{-h(1,p)} (1 - p^{-2s})^{-h(2,p)}\ H_3(s)\ , \ldots$$

Il s'ensuit, en comparant les coefficients de $\Psi(s)$ et d'une fonction "jumelle",

$$\bar{\Psi}(s) = \prod \bar{F}_p(p^{-s})$$

que si, pour tout p, les coefficients $h(1, p)$ sont les mêmes pour F_p et $\bar{F}_p$;

les deux fonctions ont les mêmes zéros, et les mêmes singularités, si $Re(s) > \frac{1}{2}$, etc.

Dans un autre sens, généralisons (III.1.2), nous obtenons :

(III.1.5) $$\Psi_k(s) = \sum d_k(n)\ \psi(n)\ n^{-s} ,$$

alors

(III.1.6) $$\Psi_k(s) = [\Psi(s)]^k\ H_2(s) .$$

D'où, une connaissance complète des singularités, et des zéros de $\Psi_k(s)$ dans $Re(s) > \frac{1}{2}$.

De même, si pour tout p tel que $(D/p) = -1$, $h(1\ ,\ p) = 0$, on a

$$\sum d(n\ ,\ D)\ \psi(n)\ n^{-s} = \Psi^2(s)\ H_2(s)$$

(voir, comme cas particulier (II.3.6)).

On observera que si $F_p(x) = 1 + \sum_1^{\infty} F_{p,1}\ x^n$ on a $F_{p,1} = h(1\ ,\ p)$.

IV. Les fonctions T et U et les corps intermédiaires.

1. Formules élémentaires.

Soient $p(x)$ un polynôme irréductible à coefficients rationnels, ν son degré, x_j $(j = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ \nu)$ ses racines, Gal son groupe de Galois, et T la transitivité de Gal (sur ν éléments). Notons

(IV.1.1) $$K_n = \underset{\sim}{Q}(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_n)\ ;\quad n \leqslant T ,$$

(IV.1.2) $$\zeta_n(s) \text{ fonction } \zeta \text{ de } K_n .$$

On voit que, puisque $n \leqslant T$, K_n sera de degré $\nu(\nu - 1)\dots(\nu - n + 1)$. Soit, alors, $\lambda_n(p^j)$ le nombre des idéaux premiers dans K_n divisant p et de norme p^n. Nous avons alors

(IV.1.3) $$\zeta_n(s) = \prod_j \prod_p (1 - p^{-js})^{-\lambda_n(p^j)}\ ;\quad 1 \leqslant n \leqslant T ,$$

(IV.1.4) $$\zeta_n(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-\lambda_n(p)}\ H_2(s) .$$

Définissons alors

(IV.1.5) $$\zeta_1(s) \overset{\text{def}}{=} \sum_1^{\infty} Z(n)\ n^{-s} ,$$

(IV.1.6) $$\Phi(s) = \zeta_1(s)/\zeta(s) \overset{\text{def}}{=} \sum \varphi(n)\ n^{-s} ,$$

(IV.1.7) $$T_k(s) \overset{\text{def}}{=} \sum [Z(n)]^k\ n^{-s} ,$$

(IV.1.8) $$U_k(s) \overset{\text{def}}{=} \sum [\varphi(n)]^k\ n^{-s} .$$

Un argument combinatoire élémentaire montre que

(IV.1.9) $$\lambda_2(p) = \lambda_1(p)(\lambda_1(p) - 1) \text{ si } T \geqslant 2 ,$$

(IV.1.10) $$\lambda_n(p) = \lambda_1(p)(\lambda_1(p) - 1)\dots(\lambda_1(p - n + 1) \text{ si } T \geqslant n .$$

D'où, utilisant les résultats de III.1, nous avons :

(IV.1.11) $$T_2(s) = \zeta_1(s)\ \zeta_2(s)\ H_2(s) \quad \text{si} \quad T \geqslant 2\ ,$$

(IV.1.12) $$T_3(s) = \zeta_1(s)\ \zeta_2^3(s)\ \zeta_3(s)\ H_2(s) \quad \text{si} \quad T \geqslant 3\ ,$$

(IV.1.13) $$U_2(s) = \frac{\zeta(s)\ \zeta_2(s)}{\zeta_1(s)}\ H_2(s) \quad \text{si} \quad T \geqslant 2\ ,$$

(IV.1.14) $$U_3(s) = \frac{\zeta_3(s)\ \zeta_1(s)}{\zeta(s)}\ H_2(s) \quad \text{si} \quad T \geqslant 3\ ,$$

(IV.1.15) $$\sum_1^\infty Z(n)\ \varphi(n)\ n^{-s} = \zeta_2(s)\ H_2(s) \quad \text{si} \quad T \geqslant 2\ ,$$

et autres formules comparables.

En particulier,

$T_2(s)$ a un pôle double en $s = 1$ si $T \geqslant 2$,

$T_3(s)$ a un pôle quintuple en $s = 1$ si $T \geqslant 3$,

$U_2(s)$ a un pôle simple en $s = 1$ si $T \geqslant 2$,

$U_3(s)$ a un pôle simple en $s = 1$ si $T \geqslant 3$.

$T_2(s)$, $T_3(s)$ n'ont aucune autre singularité dans $\mathrm{Re}(s) > 1/2$. La question de $U_3(s)$, $U_2(s)$ est plus compliquée. $U_3(s)$ n'a pas d'autre singularité si Gal est résoluble. $U_2(s)$ n'a pas d'autre singularité si le groupe de Galois de N/K_1 , N , clôture galoisienne de K_1 , est résoluble, ce qui est le cas des groupes S_5 , $\mathfrak{A}_5$, $PGL_2(p)$ et $PSL_2(p)$ sur $p + 1$ éléments.

2. Généralisations.

La formule élémentaire qui donne $\lambda_n(p)$, connaissant $\lambda_1(p)$, a été généralisée par M. P. SCHÜTZENBERGER pour $\lambda_n(p^j)$, $j = 2 , 3 , \ldots$

L'application formelle de ces formules, quand la transitivité T est trop petite, ne donne plus <u>une</u> fonction ζ mais un produit de γ_n fonction ζ que nous continuerons à noter $\zeta_n(s)$. Dans ce cas,

$T_2(s)$ a un pôle de multiplicité $1 + \gamma_2$

$U_2(s)$ a un pôle de multiplicité γ_2 , etc.

Le comportement de T_k et U_k dans $0 < \mathrm{Re}(s) \leqslant 1/2$ demande la prise en considération des $\lambda_1(p^2)$ pour $1/3 < \mathrm{Re}(s) \leqslant 1/2$ etc. En fait, définissaht $\{c(n\ ,\ p)\}$ par

(IV.2.1) $$\prod_n (1 - p^{-ns})^{-\lambda(p^r)} = 1 + \sum_1^\infty c(n\ ,\ p) p^{-ns}\ ,$$

nous avons à calculer les coefficients $h(k\ ,\ n\ ,\ p)$ tels que

(IV.2.3) $$1 + \sum_{n=1}^\infty [c_1(n\ ,\ p)]^k\ p^{-ns} = \prod_{n=1}^\infty (1 - p^{-ns})^{-h(k,n,p)}$$

pour étudier le comportement de $T_k(s)$. Pour $U_k(s)$, le raisonnement est analogue. Ceci ne semble pouvoir être fait actuellement que pour chaque groupe de Galois, sans formulation générale inutile. Mentionnons cependant les résultats suivants, faciles à obtenir,

1° Si ν est premier et si $|\mathrm{Gal}| = \nu(\nu - 1)$ (le groupe métacyclique de degré ν), alors $T_2(s)$ a, en $s = 1/2$, un <u>zéro</u> de multiplicité $(\nu^2 - 1)/4$.

2° Si $\mathrm{Gal} \sim S_\nu$, $\nu \geqslant 3$, $T_2(s)$ a, en $s = 1/2$, un <u>zéro</u> de multiplicité 2 .

Ceci suggère que la fonction $T_2(s)$ est holomorphe sur $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.
Pour $PGL_2(p)$ sur $p + 1$ éléments, on trouve que $1/2$ est un zéro de multiplicité $(p + 1)/4$ si $p = 7$, 11 .
Pour en finir avec ce sujet, mentionnons seulement que si ν est premier, et si $|\mathrm{Gal}| = \nu(\nu - 1)/K$, $T_2(s)$ a un pôle de multiplicité $1 + K$ en $s = 1$.

3. Corps cubiques.

Nous allons examiner de plus près le cas $\mathrm{Gal} \sim S_3$. Rappelons trois formules élémentaires.

(IV.3.1) $$\textstyle\sum_0^\infty (n + 1)^2\, x^n = (1 - x^2)/(1 - x^4) ,$$

(IV.3.2) $$\textstyle\sum_0^\infty (n + 1)^3\, x^n = (1 + 4x + x^2)/(1 - x)^4 ,$$

(IV.3.3) $$\textstyle\sum_0^\infty (n + 1)^2 (n + 2)^2\, x^n/4 = (1 + 4x + x^2)/(1 - x)^5 .$$

Définissant les nombres $h(n)$ par

(IV.3.4) $$(1 + 4x + x^2) = \prod (1 - x^n)^{-h(n)} ,$$

on a

(IV.3.5) $$h(n) = -\,\mathrm{Tr} \textstyle\sum_{dd'=n} \mu(d')(-2 + \sqrt{3})^d ,$$

(IV.3.6) $$\text{signe } h(n) = (-1)^{n-1} .$$

En fait,

(IV.3.7) $h(1) = 4$, $h(2) = -9$, $h(3) = 16$, $h(4) = -45$, $h(5) = 144$, ...

Dans un corps cubique de discriminant Df^2 , nous distribuons les premiers rationnels dans les ensembles A , B , C , D , E selon qu'ils appartiennent à la classe 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , définie en (I.3).
Marquant d'un astérisque les fonctions de E , amputées des facteurs locaux (ramifiés) rattachés aux classes 4 et 5 , nous avons

$$\zeta^*(s) = A(s)\, B(s)\, C(s) , \quad L^*(s) = A(s)\, B(s)\, C(2s)/C(s) , \ \ldots ,$$

les fonctions $A(s)$, ... , étant définies en (I.2.1), d'où les relations

(IV.3.8) $$\frac{C^2(s)}{C(2s)} = \frac{\zeta^*(s)}{L^*(s)} \Longrightarrow C(s) = \left(\frac{\zeta^*(s)}{L^*(s)}\right)^{1/2} \left(\frac{\zeta^*(2s)}{L^*(2s)}\right)^{1/4} \cdots$$

(IV.3.9) $$\frac{B^3(s)}{B(3s)} = \frac{\zeta^*(s) L^*(s)}{\Phi^*(s)} \Longrightarrow B(s) = \left(\frac{\zeta^*(s) L^*(s)}{\Phi^*(s)}\right)^{1/3} \left(\frac{\zeta^*(3s) L^*(3s)}{\Phi^*(3s)}\right)^{1/9} \cdots$$

(IV.3.10) $$A^6(s) = \zeta^*(s)\, L^*(s)\, \Phi^{*2}(s)/B^2(3s)\, C^3(2s) .$$

Après quelques manipulations un peu compliquées, on arrive au résultat suivant.

$$\text{(IV.3.11)} \qquad \frac{A^6(s)\ A(6s)}{A^3(2s)\ A^2(3s)} = \frac{V(s)\ \zeta(s)\ L(s)\ \Phi^2(s)\ L(2s)\ \zeta(6s)}{\zeta^2(2s)\ \Phi(2s)\ \zeta(3s)\ L(3s)} .$$

D'où, pour les fonctions T_2^* et U_3^* , notant $W(s) = \prod_A (1 + 4p^{-s} + p^{-2s})$, nous avons :

$$\text{(IV.3.12)} \qquad T_2^*(s) = A^2(s)\ W(s)\ \zeta_K^*(s)\ \zeta^*(2s)/L^*(2s) ,$$

$$\text{(IV.3.13)} \qquad U_3^*(s) = A^2(s)\ W(s)\ \Phi^*(s) ,$$

$$\text{(IV.3.14)} \qquad T_2^*(s) = \frac{\zeta^*(s)\ \zeta^*(2s)\ U_3(s)}{L^*(2s)} .$$

Rétablissant les facteurs locaux supprimés, et explicitant $V(s)$, on a

$$\text{(IV.3.15)} \qquad U_3(s) = A^2(s)\ W(s)\ \Phi(s) ,$$

$$\text{(IV.3.16)} \qquad T_2(s) = \frac{\zeta(s)\ \zeta(2s)\ U_3(s)\ D^2(s)}{D^2(2s)\ E(2s)\ L(2s)} \prod_E (1 - (D/p)p^{-s})^{-1} .$$

Si on observe que

$$\text{(IV.3.17)} \qquad \sum (n + 1)^k\ x^n = P_{k-1}(x)\ (1 - x)^{-k-1} ,$$

où $P_{k-1}(x)$ est un polynôme de degré $k - 1$, on a en général,

$$\text{(IV.3.18)} \qquad U_{2k+1}(s) = A^{2k}(s) \prod_A P_{2k}(p^{-s})\ \Phi(s) ,$$

et une formule un peu plus compliquée pour U_{2k} , mais nous manquons d'informations sur les polynômes $\{P\}$. On a

$$P_3(x) = (1 + x)(1 + 10x + x^2) , \quad P_4(x) = 1 + 26x + 66x^2 + 26x^3 + x^4$$

(voir néanmoins LAWDEN [6]).

Dans le cas des corps cubiques cycliques, les formules restent valables en convenant que $D = 1$, $L(s) = \zeta(s)$, $\Phi(s) = L^*(s)\ \bar{L}^*(s)$.

Il est très curieux de constater que $A^{2k}(s) \prod P_{2k}(p^{-s})$ est une fonction méromorphe si $\mathrm{Re}(s) > 0$.

V. Applications. Questions ouvertes.

1. Estimations asymptotiques.

Ces résultats donnent des résultats pour l'estimation de certaines sommes partielles de coefficients. Considérons ainsi $\Psi(s)$, défini en (I.2.2), et supposons que $\Psi(s)$, si $\mathrm{Re}(s) > \theta$, $\theta < 1$, n'ait d'autre singularité qu'un pôle simple en $s = 1$. Sous certaines réserves relatives au comportement de $|\Psi(\sigma + it)|$, $t \longrightarrow \infty$, on aura, en utilisant (III.1.5),

$$\text{(V.1.1)} \qquad \sum_{n=1}^{N} \psi(n) = CN + o(N) ,$$

$$\text{(V.1.2)} \qquad \sum_{n=1}^{N} \psi(n)\, d_k(n) = Np_{k-1}(\log N) + o(N) ,$$

où p_{k-1} est un polynôme, le terme $o(N)$ étant susceptible d'être amélioré.

De la même façon, dans le cas d'un groupe Galois doublement transitif, on a :

$$\text{(V.1.3)} \qquad \sum_1^N Z^2(n) = Np_1(\log N) + O(N^{1-\varepsilon}) \ ; \quad \varepsilon > 0 ,$$

$$\text{(V.1.4)} \qquad \sum_1^N f^2(n) = C_K\, N + O(N^{1-\varepsilon}) ,$$

$$\text{(V.1.5)} \qquad \sum_1^N \frac{Z^2(n)}{d_2(n)} = C_K'\, N + O(N^{1-\varepsilon}) .$$

Théoriquement, on peut utiliser, en se servant des methodes exposées par TITCHMARSH [9], ces formules pour essayer d'obtenir une estimation de

$$\int_0^T |\Phi(1/2 + it)|^2\, dt \quad \text{et} \quad \int_0^T |\zeta(1/2 + it)|^2\, dt .$$

Des résultats intéressants ont été obtenus par L. WEINSTEIN [10] dans ce sens. Cependant l'état actuel de l'analyse ne permet pas d'obtenir des O-estimations sans hypothèse complémentaire, formes plus ou moins atténuées de l'hypothèse de Riemann généralisée. Néanmoins on obtient ainsi des Ω-estimations toujours intéressantes.

2. Questions ouvertes.

1° Les fonctions $T_k(s)$, $U_k(s)$ sont-elles toujours méromorphes dans leur domaine d'existence ? Ceci semble résulter de résultats inédits de Kurokawa [5]. Dans le cas des corps cubiques, ceci entraine des congruences curieuses pour les nombres $h(n)$ de (IV.3.7).

2° Dans le cas des corps cubiques, on a toujours $T_2(1/2n) = 0$. De même, la fonction représentée par $\sum (d_k(n))^2\, n^{-s}$, qui est méromorphe, admet les points $1/2n$ comme zéros (ce sont les seuls zéros réels). Dans quelle mesure cette particularité est-elle partagée par toutes les fonctions $T_k(s)$, $U_k(s)$ pour tous les groupes de Galois ? Quelle information arithmétique donne la multiplicité de ces zéros, en particulier en $1/2$?

3° Si $\{\varphi(n)\}$ est la suite des coefficients d'une quelconque fonction L d'Artin est-il exact que $\sum (\varphi(n))^2\, n^{-s}$ n'ait d'autre singularité qu'un pôle simple en $s = 1$ si $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1/2$?

4° Soient K_1 et K_2 2 corps algébriques, $Z_j(n)$, $j = 1$, 2 , les coefficients de leur fonction ζ .

Dans d. nombreux cas, $\sum Z_1(n)\, Z_2(n)\, n^{-s}$ a un pôle simple en $s = 1$, et pas d'autre singularité si $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1/2$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que cela soit vrai.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARRUCAND (P.). - Quelques propriétés des coefficients des séries L associées aux corps cubiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, 1971, Série A, p. 960-963.

[2] ESTERMANN (T.). - On certain functions represented by Dirichlet series, Proc. London math. Soc., 2nd series, t. 27, 1928, p. 435-448.

[3] HASSE (H.). - Arithmetische Theorie des kubischen Zahlkörper auf klassenkörpertheoritischer Grundlage, Math. Z., t. 31, 1930, p. 565-582.

[4] HECKE (E.). - Mathematische Werke. - Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1959.

[5] KUROKAWA (A.). - Travail inédit.

[6] LAWDEN (D. F.). - The function $\sum_{n=1}^{\infty} n^r z^n$ and associated polynomials, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 47, 1951, p. 309-314.

[7] MARTINET (J.) et PAYAN (J.-J.). - Sur les extensions cubiques non-galoisiennes des rationnels et leur clôture galoisienne, J. für die reine und angew. Math., t. 228, 1967, p. 15-37.

[8] RAMANUJAN (S.). - Collected papers. - Cambridge, at the University Press, 1927.

[9] TITCHMARSH (E. C.). - The theory of the Riemann zeta-function. - Oxford, at the Clarendon Press, 1951.

[10] WEINSTEIN (L.). - Travail inédit.

[11] WILSON (B. M.). - Proofs of some formulae enunciated by Ramanujan, Proc. London math. Soc., 2nd Series, t. 21, 1923, p. 235-255.

(Texte reçu le 28 février 1978)

Pierre BARRUCAND
151 rue du Château des Rentiers
75013 PARIS