Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Gérald Tenenbaum

Lois de répartition des diviseurs

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, nº 1 (1977-1978), exp. nº 19, p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_1_A16_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
19e année, 1977/78, n° 19, 3 p.
9 janvier 1978

LOIS DE RÉPARTITION DES DIVISEURS

par Gérald TENENBAUM

L'exposé oral avait pour but de présenter les résultats essentiels de [4], [8], [9] et [10]. Nous nous contenterons ici d'un résumé succinct, renvoyant le lecteur, pour plus de détails et pour les démonstrations, aux articles cités dans la bibliographie.

1. Soit $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ avec $p_1 < p_2 < \dots < p_k$, la décomposition en facteurs premiers d'un entier. ERDÖS a montré [5] que l'ordre de grandeur en moyenne de $\log\log p_i$ est "approximativement" i ; GALAMBOS a précisé ce résultat dans [6].

La répartition des diviseurs, permiers ou non, d'un entier est moins bien connue. Alors que, pour les facteurs premiers, ce sont les quantités $\log\log p$ qui interviennent naturellement, le cadre le plus agréable pour les diviseurs quelconques est de les placer relativement aux puissances de n. Dans cette optique, nous définissons, pour tout entier n, une variable aléatoire D_n qui prend les valeurs $\log d/\log n$, pour d divisant n, avec probabilité uniforme $1/d(n)$.

Dans [4], DRESS, DESHOUILLERS et L'auteur ont montré qu'en moyenne la loi de probabilité de D_n converge vers la loi de l'arcsinus. Plus précisément, on a uniformément en u dans $[0, 1]$ et pour x infini,

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} \operatorname{prob}(D_n \leq u) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{u} + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big) . \tag{1}$$

2. Cependant, il n'existe pas de suite (n_i) de densité positive telle que la suite des variables D_{n_i} possède une loi limite. Ce résultat est une conséquence facile du fait que la densité supérieure de la suite des entiers n, ayant au moins un diviseur dans l'intervalle $[n^{\alpha}, n^{\alpha+\varepsilon}[$, tend vers 0 avec ε, pour tout α strictement positif. Dans [8], on montre un résultat plus fort :

Pour tout couple (λ, t) de $[0, 1] \times [1, +\infty[$, la suite des entiers n, ayant au mons un diviseur dans $[n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$, possède une densité $h(\lambda, t)$ qui est une fonction continue de (λ, t) et qui vérifie

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ C(\varepsilon)\ ,\ \forall\ t \geq 1 + \varepsilon\ ,\ \ h(\lambda, t) \leq C(\varepsilon)(1 - \lambda)^{\delta}\ |\log(1 - \lambda)|^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} , \tag{2}$$

où $C(\varepsilon)$ est une constante positive ne dépendant que de ε et où δ vaut $1 - (\log(e \log 2)/\log 2) = 0{,}0860\dots$

La démonstration de l'existence de la densité $h(\lambda, t)$ nécessite une majoration préalable du type de (2), c'est-à-dire qui tend vers 0 lorsque λ tend vers 1. Certains résultats antérieurs ([7], où l'on utilise un théorème d'Erdös) laissent supposer que l'exposant δ dans (2) est optimal. La majoration (2) nécessite à son tour une étude de la répartition des facteurs premiers : on montre en particulier que le nombre de facteurs premiers d'un entier n qui appartiennent à l'intervalle $]n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$ suit approximativement une loi de Poisson de paramètre $\log 1/\lambda$. Plus précisément, si $f_k(\lambda, t)$ désigne la densité de la suite des entiers n ayant k facteurs premiers dans $]n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$, on a, pour $t \geqslant k+1$,

$$(3) \qquad \frac{\lambda}{k!} \log^k \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{2}{\Gamma(t-k)}\right) \leqslant f_k(\lambda, t) \leqslant \frac{\lambda}{k!} \log^k \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{2}{\Gamma(t-k)}\right),$$

où Γ est la fonction d'Euler.

L'encadrement (3) est obtenu en utilisant les relations entre f_{k+1} et f_k : ces relations faisant intervenir des produits de convolution, on peut en déduire, grâce à la transformée de Laplace, des relations intégrales liant $f_k(\lambda, t)$ et la fonction connue $t \longmapsto \rho(t)$, étudiée en particulier par De BRUIJN ([1], [2] et [3]) et qui est égale à la densité des entiers n dont tous les facteurs premiers sont $\leqslant n^{1/t}$. On obtient, par exemple,

$$(4) \qquad \int_0^t f_k(\lambda, u)\, \rho(t-u)\, du = \frac{1}{k!} \int_0^t \rho\left(\frac{t-u}{\lambda}\right) \varphi_k(u)\, du$$

avec

$$\varphi_k(u) = \int_{\substack{[\lambda, 1]^k \\ \sum x_i \leqslant u}} \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_k}{x_k}.$$

L'encadrement (3) est enfin déduit de la combinaison de ces équations intégrales et de certaines équations différentielles aux différences vérifiées par les f_k, par exemple

$$(5) \qquad t \frac{\partial}{\partial t} f_0(\lambda, t) = f_0(\lambda, t-1) - f_0(\lambda, t-\lambda).$$

3. En faisant tendre t vers l'infini dans (3), on voit que chaque densité $f_k(\lambda, t)$ admet une limite qui est une fonction continue de λ. Dans [9], on montre que cette propriété est partagée par la fonction $h(\lambda, t)$; on a

$$\lim_{t\to\infty} h(\lambda, t) = h(\lambda)$$

avec

$$(6) \qquad (1-\lambda) \leqslant h(\lambda) \leqslant 6(1-\lambda)^{\delta}.$$

De plus, $h(\lambda)$ est également la limite, pour y infini, de la valeur $d(\lambda, y)$ de la densité de la suite des entiers n ayant au moins un diviseur dans $]y^{\lambda}, y[$.

4. Enfin, nous avons précisé l'étude de la répartition des diviseurs en montrant [10] que, pour tout couple (λ, t) de $]0, 1] \times]1, +\infty[$, la fonction arithmétique

$$n \longmapsto \mathrm{prob}(\lambda \leqslant tD_n < 1)$$

possède une fonction de répartition $F(x)$ qui est telle que la mesure associée dF soit une somme (infinie) de mesures de Dirac aux points diadiques $a/2^b$ (a impair ou nul , $b \geqslant 1$). Cela implique que l'analogue pour les diviseurs de la densité $f_k(\lambda, t)$ est identiquement nulle (c'est-à-dire que la densité des entiers n, ayant exactement k diviseurs dans $]n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$, est nulle pour tous λ , t et $k \geq 1$), et même que, si $(\lambda, t) \in]0, 1] \times]1, +\infty[$ et $n \longmapsto \psi(n)$, tendant vers $+\infty$ arbitrairement lentement, sont donnés, il existe une suite $\mathfrak{a}$ de densité 1 , telle que, pour tout entier n de $\mathfrak{a}$, le nombre des diviseurs de n dans $]n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$ est, ou bien nul, ou bien plus grand que $d(n)/\psi(n)$.

Ce dernier résultat permet de se faire une idée intuitive de la répartition des diviseurs : Pour presque tout entier n , les diviseurs de n sont concentrés dans un nombre "fini" d'intervalles du type $]n^{\alpha}, n^{\beta}[$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] De BRUIJN (N. G.). - On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$, Indag. Math., t. 13, 1951, p. 50-60 ; et Koninkl. nederl. Akad. Wetensch., Proc., Series A, t. 54, 1951, p. 50-60.

[2] De BRUIJN (N. G.). - On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$, II, Indag. Math., t. 28, 1966, p. 239-247 ; et Koninkl. nederl. Akad. Wetensch., Proc., Series A, t. 69, 1966, p. 239-247.

[3] De BRUIJN (N. G.). - The asymptotic behaviour of a function occuring in the theory of primes, J. Indian math. Soc., New Series, t. 15, 1951, p. 25-32.

[4] DESHOUILLERS (J. M.), DRESS (F.) et TENENBAUM (G.). - Lois de répartition des diviseurs, I, Acta Arithm., Warszawa, t. 36, 1978, fasc. 4 (à paraître).

[5] ERDÖS (P.). - On the distribution function of additive functions, Annals of Math., Series 2, t. 47, 1946, p. 1-20.

[6] GALAMBOS (J.). - The sequences of prime divisors of integers, Acta Arithm., Warszawa, t. 31, 1976, p. 213-218.

[7] TENENBAUM (G.). - Sur deux fonctions de diviseurs, J. London math. Soc., Series 2, t. 14, 1976, p. 521-526.

[8] TENENBAUM (G.). - Lois de répartition des diviseurs, II, Acta Arithm., Warszawa, t. 38 (à paraître).

[9] TENENBAUM (G.). - Lois de répartition des diviseurs, III, Acta.Arithm., Warszawa (soumis pour publication).

[10] TENENBUAM (G.). - Lois de répartition des diviseurs, IV, Annales Inst. Fourier, Grenoble (soumis pour publication).

(Texte reçu le 18 mai 1978)

Gérald TENENBAUM
UER de Mathématiques et Informatique
Université de Bordeaux-I
351 cours de la libération
33405 TALENCE