Jacques Martinet

Petits discriminants

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, nº 1 (1977-1978), exp. nº 14, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_1_A11_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
19e année, 1977/78, n° 14, 5 p.

12 décembre 1977

PETITS DISCRIMINANTS

par Jacques MARTINET (*)

Des travaux de ODLYZKO, puis de ODLYZKO, POITOU [P] et SERRE résultent des minorations des discriminants bien meilleures que celles obtenues par des méthodes géométriques. Le problème se pose de savoir si ces minorations sont proches des meilleures possibles. Pour donner une réponse à cette question, nous construisons des corps dont le discriminant est petit par rapport aux minorations évoquées ci-dessus. Plus précisément, nous nous référons à une table de ODLYZKO datée du 29 novembre 1976 [O], et nous nous limitons aux corps totalement imaginaires. La comparaison est faite avec les minorations obtenues sous l'hypothèse de Riemann généralisée (GRH).

Pour des degrés n relativement petits, nous obtenons des exemples de corps K de degré n, de discriminant d_K, pour lesquels $|d_K|^{1/n}$ n'excède que de peu la minoration sous GRH donnée dans [O]. Les résultats sont présentés sous forme de tables. La règle, quelque peu arbitraire, adoptée pour le choix des corps présentés dans les tables est la suivante : Un degré n ne figure dans les tables que lorsque nous avons trouvé un corps K pour lequel $|d_K|^{1/n}$ n'excède pas de plus de 3 % la minoration sous GRH de [O]. Cela nous a permis de donner des exemples en degrés 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60 et 72.

La table 1 est construite en considérant des corps de classes de corps quadratiques imaginaires. Elle a été confectionnée d'après des calculs de Gilles ROBERT.

La table 2 est construite en considérant des corps de classes de corps totalement imaginaires de degré 4, par le procédé suivant : Soit k un corps totalement imaginaire de degré 4, soit ε une unité fondamentale de k, et soit ζ une racine primitive de l'unité dans k, d'ordre q. On étudie l'idéal I engendré par $(\varepsilon^p - \zeta^r)$, $p \in \underset{\sim}{N}$, $0 \leq r < q$.

La théorie du corps de classes fournit une suite exacte

$$0 \longrightarrow (\mathcal{O}_k/I)^*/\mathrm{Im}\, E_k \longrightarrow G_I \longrightarrow Cl_k \longrightarrow 0 ,$$

où

Cl_k est le groupe des classes d'idéaux de k,
$\mathcal{O}_k$ est l'anneau des entiers de k,
E_k est le groupe des unités de k (éléments inversibles de $\mathcal{O}_k$),
G_I est le groupe de Galois (abélien) du corps de classes k_I de rayon I de k.

(*) Laboratoire associé au C. N. R. S. n° 226.

On trouve le degré de k_I sur k en calculant la norme de I et en observant que ε^p et ζ^r ont même image dans $(O_k/I)^*$. On trouve ensuite les discriminants sur k de k_I et de ses sous-corps en décomposant le discriminant de k_I/k en produit de conducteurs. Les corps, figurant dans les tables 1 et 2, sont des corps de classes de rayon, à l'exception du corps de degré 24 de la table 1, qui est un sous-corps du corps de degré 48 donné dans cette même table.

Remarque 1. - On peut vérifier que tous les corps décrits dans les tables 1 et 2 ont pour nombre de classes 1 (i. e. leurs anneaux d'entiers sont principaux). Cela résulte directement de l'examen des tables de [O], sauf pour le corps K de degré 72 de la table 2, pour lequel le degré d'une extension non ramifiée est majoré seulement par 2. On obtient le résultat cherché en utilisant l'action du groupe de Galois de K/k sur Cl_K (notons que cette difficulté ne se présenterait pas si l'on admettait GRH).

Pour obtenir de bons résultats en degré dépassant la centaine, il faut utiliser d'autres méthodes. Voici deux exemples, en degrés 480 et 12 144, pour lesquels les excès par rapport aux tables de ODLYZKO sont 4,8 % et 10 % respectivement. On utilise une table de HASSE [H] qui donne les nombres de classes des corps abéliens de conducteurs $\leqslant 100$. On considère le corps abélien de degré 4 (resp. 44), de conducteur $3.17 = 51$ (resp. $3.23 = 69$), de nombre de classes 10 (resp. $3.23 = 69$). Le corps de classes de Hilbert de ce corps est de degré 40 (resp. 3 036), le corps de degré 40 figure du reste dans la table 2. Les nombres premiers 17 et 23 sont inertes dans $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. On considère alors le corps de classes de Hilbert du corps de rayon 17 (resp. 23) sur $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Son degré est multiple de $2 \times (17^2 - 1)/6 \times 5 = 480$ (resp. $2 \times (23^2 - 1)/6 \times 69 = 12\,144$). Nous avons ainsi construit un corps K de degré $m = 480$, et un corps L de degré $n = 12\,144$.

La table de [O] sous GRH donne, pour tout corps k de degré $m = 480$, la minoration $|d_k|^{1/480} \geqslant 26,485$. On trouve pour le discriminant de K l'expression

$$|d_K|^{1/m} = 3^{1/2}.17^{47/48} = 27,757\ , \text{ et } \ 27,757/26,485 = 1,048\ .$$

Par interpolation de la table de [O], on obtient, pour un corps k de degré $n = 12\,144$, la minoration approximative $|d_k|^{1/n} \geqslant 34,95$. On trouve pour le discriminant de L l'expression $|d_L|^{1/n} = 3^{\frac{1}{2}}.23^{87/88} = 38,44$, qui excède de 10 % environ la minoration ci-dessus.

Remarque 2. - On peut aussi faire des comparaisons avec les minorations asymptotiques de $|d_K|^{1/n}$, pour $n = [K : \mathbb{Q}]$ tendant vers l'infini. On trouve dans [P] la minoration 44,7. Nous avons construit dans [M1] un corps k de degré 10 pour lequel $|d_k|^{1/10} = 92,37$, et qui possède une 2-tour de corps de classes infinies, à savoir le corps $k = \mathbb{Q}(\cos(2\pi/11)\ , \sqrt{-46})$, pour lequel

$$|d_k|^{1/10} = 2^{3/2}.11^{4/5}.23^{1/2} = 92,368 \ldots$$

Pour tout n, il existe donc un corps k_n de degré 5.2^{n+1}, pour lequel

$|d_{k_n}|^{1/[k_n : \mathbb{Q}]} = |d_k|^{1/10}$; l'excès par rapport à la table est de 107 % environ.

Remarque 3. – Les constructions de corps de petits discriminants peuvent aussi être utilisées pour donner des exemples de corps de nombre de classes 1 de degré relativement élevé (cf. [M2]).

TABLE 1

Corps de classes de corps quadratiques imaginaires (*)

n	– d	f	$\vert d_K\vert^{1/n}$	$\vert d_K\vert^{1/n}$	Odℓ	%
2	3	(1)	$3^{1/2}$	1,732	1,721	0,64
4	3	p_{13}	$3^{1/2}.13^{1/4}$	3,289	3,263	0,79
6	3	p_{19}	$3^{1/2}.19^{1/3}$	4,622	4,592	0,65
8	4	p_{17}	$2.17^{3/8}$	5,787	5,734	0,92
10	3	p_{31}	$3^{1/2}.31^{2/5}$	6,841	6,726	1,70
12	3	$p'_3\, p_{19}$	$3^{3/4}.19^{5/12}$	7,774	7,598	2,32
14	71	(1)	$71^{1/2}$	8,426	8,371	0,66
16	15	$p_3\, p_5$	$3^{3/4}.5^{7/8}$	9,321	9,068	2,78
18	4	p_{37}	$2.37^{4/9}$	9,954	9,697	2,65
22	7	p_{23}	$7^{1/2}.23^{5/11}$	11,003	10,797	1,91
24	7	$(3)p_7$	$3^{3/4}.7^{5/6}$	11,537	11,283	2,25
32	15	$p_2^2\, p_3\, p_5$	$2^{1/2}.3^{3/4}.5^{7/8}$	13,181	12,912	2,08
36	23	p_{13}	$23^{1/2}.13^{5/12}$	13,964	13,581	2,82
48	7	$(3)p'_7$	$3^{7/8}.7^{11/12}$	15,565	15,225	2,23

La colonne 1 donne le degré d'un corps K , extension abélienne du corps quadratique imaginaire de discriminant d (colonne 2) ayant pour conducteur f (colonne 3). Le discriminant d_K de K est calculé dans les colonnes 4 et 5. La colonne 6 donne la minoration obtenue sous GRH par ODLYZKO dans sa table du 29 novembre 1976. Les résultats des colonnes 5 et 6 sont arrondis aux 3 décimales les plus proches, et le quotient des nombres de ces deux colonnes est donné en pourcentage dans la colonne 7, arrondi aux 2 décimales les plus proches. La notation p_q désigne un idéal premier de degré 1 au dessus de q dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

(*) Table établie d'après des calculs de Gilles ROBERT.

TABLE 2

Corps de classes de corps biquadratiques totalement imaginaires

n	d	f	$\|d_K\|^{1/n}$	$\|d_K\|^{1/n}$	Odℓ	%
12	$3^2.13$	P_{163}	$3^{1/2}.13^{1/4}.163^{1/6}$	7,687	7,598	1,17
16	$3^2.13$	P_{241}	$3^{1/2}.13^{1/4}.241^{3/16}$	9,198	9,068	1,43
20	2^8	p_{11}	$2^2.11^{2/5}$	10,438	10,270	1,64
24	$3^2.13$	P_{397}	$3^{1/2}.13^{1/4}.397^{5/24}$	11,441	11,283	1,40
40	$3^2.17^3$	(1)	$3^{1/2}.17^{3/4}$	14,501	14,183	2,24
44	$3^3.7$	P_{463}	$3^{3/4}.7^{1/2}.463^{5/22}$	14,960	14,728	1,57
48	$5^2.19^2$	$p_2\,p'_2$	$2^{2/3}.5^{1/2}.19^{1/2}$	15,472	15,225	1,62
52	5^3	P_{911}	$5^{3/4}.911^{3/13}$	16,114	15,680	2,77
56	$3^2.37$	P_{337}	$3^{1/2}.37^{1/4}.337^{13/56}$	16,496	16,097	2,48
60	$3^2.\ 7$	p_{19}	$3^{1/2}.37^{1/4}.19^{7/15}$	16,880	16,482	2,41
72	2^8	P_{577}	$2^2.577^{17/72}$	17,948	17,497	2,57

Les notations des colonnes 1, et 4 à 7, sont celles de la table 1. La notation P_q (resp. p_q) désigne un idéal premier de degré 1 (resp. de degré 2) au-dessus de q dans le corps biquadratique k de discriminant d . Le conducteur de K sur k est f (colonne 3). Voici les corps k utilisés : les corps de discriminants $3^2.13 = 117$, $3^3.7 = 189$ et $3^2.37 = 333$ sont les extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ de conducteurs respectifs p_{13} , $p_3\,p_7$ et p_{37} ; les corps de discriminants $5^3 = 125$ et $2^8 = 256$ sont les corps des racines 5e et 8e de l'unité ; le corps de discriminant $17^3.3^2 = 44\,217$ est le corps cyclique de conducteur $3.17 = 51$ (HASSE n° 6), de nombre de classes 10 ; le corps de discriminant $5^2.19^2 = 9\,025$ est le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{-19})$, dont le nombre de classes est 4 .

BIBLIOGRAPHIE

[H] HASSE (H.). - Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper. - Berlin, Akademie-Verlag, 1952, (Mathematische Lehrbücher und Monographien, 1).

[M1] MARTINET (J.). - Tours de corps de classes et estimations de discriminants, Inventiones Math., t. 44, 1978, p. 65-73.

[M2] MARTINET (J.). - Corps de nombre de classes 1 , Séminaire de Théorie des nombres de l'Université de Bordeaux, Année 1977/78, n° 12.

[O] ODLYZKO (A. M.). - Tables datées du 29 novembre 1976 (multigraphié).

[P] POITOU (G.). - Minorations de discriminants, d'après A. M. ODLYZKO, Séminaire Bourbaki, 28e année, 1975/76, n° 479, 18 p. - Berlin, Springer-Verlag, 1977 (Lecture Notes in Mathematics, 567).

(Texte reçu le 5 avril 1978)

Jacques MARTINET
Mathématiques
Université de Bordeaux-I
351 cours de la libération
33405 TALENCE CEDEX