Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

MICHEL WALDSCHMIDT

Suites colorées

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, nº 2 (1975-1976), exp. nº G21, p. G1-G11

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_2_A23_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de théorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° G21, 11 p.

14 juin 1976

SUITES COLORÉES

par Michel WALDSCHMIDT

(d'après G. V. ČUDNOVSKIJ [3])

1. Introduction.

En 1949, A. O. GEL'FOND [4] a créé une nouvelle méthode qui permet de démontrer l'indépendance algébrique de certains nombres. La base de cette méthode est un critère (voir § 2 ci-dessous) concernant les suites d'approximations diophantiennes d'un nombre complexe ; ainsi, si θ est un nombre complexe tel qu'il existe une suite (P_n) de polynômes non nuls de $\underset{\sim}{Z}[X]$ vérifiant

$$\log|P_n(\theta)| < -6n^2 \ ; \quad \deg P_n \leqslant n \ , \quad \log H(P_n) \leqslant n \ ,$$

alors θ est algébrique (et les $P_n(\theta)$ sont nuls).

On souhaiterait avoir un critère analogue en plusieurs variables (pour simplifier, nous ne considèrerons que 2 variables).

(1.1) Si θ_1, θ_2 sont deux nombres complexes tels qu'il existe une suite de polynômes non nuls $P_n \in \underset{\sim}{Z}[X_1, X_2]$, avec $\deg P_n \leqslant n$, $\log H(P_n) \leqslant n$, et dont les valeurs au point (θ_1, θ_2) sont suffisamment petites, alors θ_1, θ_2 sont algébriquement dépendants (et les nombres $P_n(\theta_1, \theta_2)$ sont nuls).

Un tel énoncé n'est pas vrai sans hypothèses supplémentaires, comme le montre le résultat suivant de J. W. S. CASSELS (cf. [3], I, lemme 0.4).

LEMME 1.2. - <u>Pour toute fonction monotone croissante</u> $\varphi : \underset{\sim}{R}_+ \to \underset{\sim}{R}_+$, <u>il existe une constante</u> $C > 0$ <u>et deux nombres complexes</u> θ_1, θ_2, <u>algébriquement indépendants, tels que, pour tout</u> $H \geqslant C$, <u>l'inéquation</u>

$$|a\theta_1 + b\theta_2 + c| < \exp\{-\varphi(H)\}$$

<u>ait des solutions</u> $(a, b, c) \in \underset{\sim}{Z}^3$ <u>avec</u>

$$0 < \max\{|a|, |b|, |c|\} \leqslant H \ .$$

D. BROWNAWELL [2] a eu l'idée de combiner la démonstration du lemme de Gel'fond et la notion, due à S. LANG, de type de transcendance ; il démontre ainsi (1.1) en supposant que θ_1 a un type de transcendance inférieur ou égal à τ, et

$$\lim_{n\to\infty} n^{-2\tau} \log|P_n(\theta_1, \theta_2)| = -\infty \ .$$

Ce critère de Brownawell (§3) a été amélioré par G. V. ČUDNOVSKIJ [3] qui remplace 2τ par $\tau + 2$, grâce aux "suites colorées". Nous démontrons ce résultat de G. V. ČUDNOVSKIJ au §4, à partir d'une traduction de l'article original en russe [3] qui m'a été aimablement communiquée par D. BROWNAWELL.

2. Cas d'une variable ; le critère de Gel'fond.

Soit θ un nombre complexe. On se propose de minorer les nombres $P(\theta)$, pour $P \in \mathbb{Z}[X]$, en fonction de la taille $t(P) = \deg P + \log H(P)$ du polynôme P, où $\deg P$ est le degré de P, et $H(P)$ sa hauteur.

(a) Si θ est algébrique, on a, quand $P(\theta) \neq 0$,

(2.1) $$\log|P(\theta)| \geqslant - c.t(P) ,$$

où $c > 0$ ne dépend que de θ.

Pour démontrer (2.1), on utilise généralement l'inégalité de la taille ; on obtient ainsi :

$$|P(\theta)| \geqslant H^{-d+1}(h + 1)^{-N(d-1)} h^{-Nd}(N + 1)^{-d+1} ,$$

où N est le degré de P, et H sa hauteur, d est le degré de θ, et h sa hauteur.

Il est très instructif de démontrer (2.1) en considérant le résultant du polynôme P et du polynôme minimal Q de θ sur $\mathbb{Z}$; ce résultant est un entier rationnel non nul majoré par

$$d|P(\theta)| \, \|Q\|^N \, \|P\|^{d-1} ,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne ; ainsi

$$|P(\theta)| \geqslant H^{-d+1} h^{-N}(N + 1)^{-(d-1)/2} (d + 1)^{-N/2} d^{-1} .$$

(b) Supposons maintenant θ transcendant. D'abord, par le principe des tiroirs, si N et H sont des entiers positifs, il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[X]$, de degré $\leqslant N$ et de hauteur $\leqslant H$, tel que

(2.2) $$|P(\theta) \leqslant \sqrt{2}\, H^{-(N-1)/2} e^N(\max\{1 , |\theta|\})^N .$$

Cette inégalité (2.2) montre qu'on ne peut pas souhaiter mieux que l'énoncé suivant :

(2.3) Si θ est un nombre complexe, pour tout polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[X]$, on a

$$\log|P(\theta)| \geqslant -c.t(P)^2 ,$$

où c ne dépend que de θ.

Malheureusement, cet énoncé (2.3) est faux : pour toute fonction croissante

$$\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ ,$$

il est facile de construire un nombre $\theta \in \mathbb{C}$ tel que le système

$$0 < |q\theta - p| < \exp\{-\psi(q)\}$$

ait une infinité de solutions $p/q \in \mathbb{Q}$. Par conséquent, il n'existe pas d'estimation uniforme analogue à (2.1) dans le cas où θ est transcendant.

Néanmoins l'énoncé (2.3) est valable pour presque tout $\theta \in \mathbb{C}$, et, d'autre part, les nombres transcendants "usuels" (e, π, $\log 2$, e^{π}, ...) vérifient des propriétés analogues à (2.3) (plus précisément pour ces nombres on doit, actuellement, remplacer l'exposant 2 par 3, $2+\varepsilon$, $3+\varepsilon$, 3 respectivement). C'est pourquoi S. LANG a introduit la définition suivante.

DÉFINITION. - Soit τ un nombre réel positif. Un nombre $\theta \in \mathbb{C}$ a un <u>type de transcendance</u> inférieur ou égal à τ s'il existe une constante $c = c(\tau, \theta) > 0$ telle que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ vérifiant $P(\theta) \neq 0$, on ait :

$$\log|P(\theta)| \geq -c.t(P)^{\tau} .$$

Ainsi on a $\tau = 1$ pour un nombre algébrique (d'après (2.1), $\tau \geq 2$ pour un nombre transcendant (d'après (2.2)), et nous avons vu qu'il existait des nombres complexes ayant un type de transcendance infini.

Nous avons dit que l'énoncé (2.3) était faux en toute généralité. GEL'FOND a montré que, $\theta \in \mathbb{C}$ étant donné, les polynômes $P \in \mathbb{Z}[X]$ qui ne satisfont pas (2.3) sont relativement rares. Plus précisément :

(2.4) CRITÈRE <u>de Gel'fond</u>. - <u>Soit</u> $\theta \in \mathbb{C}$; <u>soit</u> t_n <u>une suite de nombres réels positifs</u>, <u>avec</u> $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$; <u>soit</u> (P_n) <u>une suite de polynômes non nuls de</u> $\mathbb{Z}[X]$, <u>avec</u> $t(P_n) \leq t_n$. <u>On suppose</u>

$$\log|P_n(\theta)| \leq -3\, t_n \max\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\} . \qquad (2.5)$$

<u>Alors</u> θ <u>est algébrique</u>, <u>et</u> $P_n(\theta) = 0$ <u>pour tout</u> n <u>tel que</u> $t_n \geq 2$.

D'autres formes de ce critère se trouvent dans [4], chap. III, §4, lemme 7, [5], lemmes 6 et 6', [1] théorème 1, et [6], chap. 5 (en particulier exercice 5.4(a)). Des références supplémentaires sont indiquées au §5.5 de [6].

<u>Schéma de la démonstration du critère</u> (2.4). - La démonstration se fait en 3 étapes.

(a) On montre l'existence d'un diviseur Q_n de P_n, puissance d'un polynôme irréductible tel que

$$\log|Q_n(\theta)| \leq -2t_n \max\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\} .$$

De plus, comme Q_n divise P_n,

$$\|Q_n\| \leq \frac{2}{e}.\exp t_n .$$

(b) Le résultant de Q_n et Q_{n+1} est un entier rationnel, dont la valeur absolue est majorée par

$$\max\{|Q_n(\theta)|\ ,\ |Q_{n+1}(\theta)|\} \times (t_n + t_{n+1}) \cdot \|Q_n\|^{t_{n+1}} \cdot \|Q_{n+1}\|^{t_n} < 1$$

dès que

$$t_n + t_{n+1} < \left(\frac{e}{2}\right)^{t_n+t_{n+1}} ,$$

c'est-à-dire $t_n + t_{n+1} \geq 3$ (disons $n \geq n_1$).

(c) Ainsi, pour tout $n \geq n_1$, Q_n est puissance d'un polynôme irréductible R ne dépendant pas de n ; écrivons $Q_n = R^{q_n}$; alors

$$\log|R(\theta)| = \frac{1}{q_n}\log|Q_n(\theta)| \leq -2\,\frac{t_n\ t_{n+1}}{q_n} ,$$

et $q_n \leq t_n$; ceci montre que $R(\theta) = 0$, donc $Q_n(\theta) = 0$ pour tout $n \geq n_1$.

Seul le point (a) mérite quelques explications supplémentaires. La majoration de $\|Q_n\|$ se déduit du lemme suivant.

LEMME 2.6. – <u>Soient</u> P_1 , P_2 <u>deux polynômes de</u> $\mathbb{C}[X]$; <u>alors</u>

$$\|P_1\| \cdot \|P_2\| < 2^{\delta-\frac{1}{2}} \cdot \|P_1\ P_2\| ,$$

<u>où</u> δ <u>est le degré de</u> $P_1\ P_2$.

Comme

$$H(P) \leq \|P\| \leq H(P)\cdot(1 + \deg P)^{\frac{1}{2}} ,$$

et que

$$2^{\delta-\frac{1}{2}}(1 + \delta)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2}{e}\, e^{\delta} \quad \text{pour tout entier } \delta \geq 0 ,$$

on en déduit

$$\|P_1\| \cdot \|P_2\| \leq \frac{2}{e} \cdot \exp\, t(P_1 \cdot P_2)$$

et

(2.7) $$H(P_1) \cdot H(P_2) < \exp\, t(P_1 \cdot P_2) .$$

L'existence du polynôme Q_n résulte du lemme suivant.

LEMME 2.8. – <u>Soit</u> $\theta \in \mathbb{C}$; <u>soit</u> $P \in \mathbb{Z}[X]$ <u>un polynôme de taille</u> t , <u>et soit</u> $\lambda \geq 3$ <u>un nombre réel. On suppose</u>

$$\log|P(\theta)| \leq -\lambda t^2 .$$

<u>Alors il existe un polynôme</u> Q , <u>divisant</u> P <u>et puissance d'un polynôme irréductible dans</u> $\mathbb{Z}[X]$, <u>tel que</u> $\log|Q(\theta)| \leq -(\lambda - 1)t^2$.

(On utilise ce lemme avec $\lambda = 3\max\{t_{n-1}\ ,\ t_n\ ,\ t_{n+1}\}/t_n$.)

Démonstration du lemme 2.8.– Utiliser le lemme 3 de [1], ou bien choisir $\lambda_1=\lambda_2=\lambda t/d$ dans le lemme 5.3.5 de [6]. Le lemme 2.8, sous sa forme primitive, est dû à A. O. GEL'FOND ([4], chap. III, § 4, lemme VI) ; la démonstration de GEL'FOND contient des idées très originales qui sont à la base de la démonstration du critère de Čudnovskij.

Remarque 2.9. – On peut montrer, en suivant [1], que sous les hypothèses du critère (2.4), on a $P_n(\theta) = 0$ pour tout n.

Remarque 2.10. – On vérifie facilement que l'hypothèse (2.5) peut être remplacée par

$$\log|P_n(\theta)| \leq -\delta_n t_n - \max\{\delta_{n-1} t_n + \delta_n t_{n-1} ; 2\delta_n t_n ; \delta_n t_{n+1} + \delta_{n+1} t_n\} ,$$

où δ_n désigne le degré de P_n.

3. Le critère de Brownawell.

Comme l'a remarqué D. BROWNAWELL, on peut remplacer, dans le critère de Gel'fond, l'anneau $\mathbb{Z}$ par un anneau A, à condition de savoir minorer les éléments non nuls de A. Pour $A = \mathbb{Z}[\theta_1]$, où θ_1 a un type de transcendance $\leq \tau$, on obtient l'énoncé suivant ([2] theorème 4.3).

(3.1) CRITÈRE de Brownawell. – Soient τ un nombre réel positif et θ_1 un nombre complexe de type de transcendance inférieur ou égal à τ. Il existe une constante $C_1 = C_1(\tau, \theta_1) > 0$ avant la propriété suivante

Si θ_2 est un nombre complexe tel qu'il existe une suite (t_n) de nombres réels positifs et une suite (P_n) de polynômes non nuls de $\mathbb{Z}[X_1, X_2]$, vérifiant

$$\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$$

$$t(P_n) \leq t_n ,$$

et

$$\log|P_n(\theta_1, \theta_2)| \leq -C_1 . t_n^\tau . \max\{t_{n-1}^\tau , t_n^\tau , t_{n+1}^\tau\} , \tag{3.2}$$

alors θ_2 est algébrique sur $\mathbb{Q}(\theta_1)$, c'est-à-dire θ_1 et θ_2 sont algébriquement dépendants.

(La taille $t(P)$ de P est définie par $t(P) = \deg P + \log H(P)$, où $\deg P$ est le degré total de P).

Schéma de la démonstration du critère (3.1).

(a) Il existe un diviseur Q_n de P_n, puissance d'un polynôme irréductible dans $\mathbb{Z}[X_1, X_2]$, tel que

$$t(Q_n) \leq 2t_n$$

et

$$\log|Q_n(\theta_1\,,\,\theta_2)| \leq -\frac{C_1}{2}\cdot t_n^\tau\cdot\max\{t_{n-1}^\tau\,,\,t_n^\tau\,,\,t_{n+1}^\tau\}\ .$$

(b) Le résultant de $Q_n(\theta_1\,,\,X_2)$ et de $Q_{n+1}(\theta_1\,,\,X_2)$ par rapport à X_2 est un élément de $\underset{\sim}{Z}[\theta_1]$, de taille majorée par $24t_n\;t_{n+1}$, et de valeur absolue majorée par

$$\max\{|Q_n(\theta_1\,,\,\theta_2)|\;;\;|Q_{n+1}(\theta_1\,,\,\theta_2)|\}\cdot\exp(2t(Q_n)t(Q_{n+1}))\ .$$

Si C_1 est choisi suffisamment grand, comme θ_1 a un type de transcendance $\leq \tau$, ce résultant est nul.

(c) Soit $R \in \underset{\sim}{Z}[\theta_1\,,\,X_2]$ tel que $Q_n(\theta_1\,,\,X_2) = R(\theta_1\,,\,X_2)^{q_n}$. Alors $q_n \leq t_n$, et

$$\log|R(\theta_1\,,\,\theta_2)| \leq -\frac{C_1}{2}\cdot\frac{t_n^{2\tau}}{q_n} \leq -\frac{C_1}{2}\cdot t_n^{2\tau-1}\ .$$

Comme $\tau \geq 1$, on en déduit $R(\theta_1\,,\,\theta_2) = 0$.

Remarquons que le type de transcendance a été utilisé non seulement dans la partie (b), mais aussi dans la partie (a), pour démontrer l'analogue du lemme 2.8. à deux variables (cf. [2] lemme 4.1).

Remarque 3.3. - On peut remplacer l'hypothèse (3.2) par

$$\log|P_n(\theta_1\,,\,\theta_2)| \leq -C_1(\max\{\delta_{n-1}\,t_n + \delta_n\,t_{n-1}\;;\;\delta_n\,t_n\;;\;\delta_n\,t_{n+1} + \delta_{n+1}\,t_n\})^\tau\ ,$$

où δ_n est le degré (total) de P_n .

4. Le critère de Čudnovskij.

L'énoncé du théorème principal de [3] est le suivant.

(4.1) CRITÈRE de Čudnovskij. - Soient τ un nombre réel positif, et θ_1 un nombre complexe de type de transcendance inférieur ou égal à τ . Il existe une constante $C_2 = C_2(\tau\,,\,\theta_1) > 0$ ayant la propriété suivante.

Si θ_2 est un nombre complexe tel qu'il existe une suite (P_n) de polynômes non nuls de $\underset{\sim}{Z}[X_1\,,\,X_2]$ vérifiant

$$t(P_n) \leq n$$

et

$$\log|P_n(\theta_1\,,\,\theta_2)| \leq -C_2\,n^{\tau+2}\ ,$$

alors $\theta_1\,,\,\theta_2$ sont algébriquement dépendants.

Nous allons présenter une démonstration de ce critère légèrement plus simple que celle de [3] : pour cela, nous allons nous ramener au critère (2.4) de Gel'fond. La proposition suivante forme l'essentiel de cette démonstration.

PROPOSITION 4.2. - Soient $\theta_1, \dots, \theta_q$ des nombres complexes algébriquement indépendants, (t_n) une suite croissante de nombres réels positifs, (P_n) une suite de polynômes non nuls de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_q]$, et $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction monotone croissante. On suppose

$$\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \psi(n)/t_{n+1}\, t_{n+2} \geq 300(2q+3) \tag{4.3}$$

$$t(P_n) \leq t_n ,$$

et

$$\log|P_n(\theta_1, \dots, \theta_q)| \leq -\psi(n) .$$

Alors il existe une suite (λ_k) de nombres réels positifs, une suite (N_k) strictement croissante de nombres entiers positifs, et une suite (R_k) de polynômes non nuls de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{q-1}]$, telles que, pour tout k suffisamment grand,

$$\lambda_k < 3t_{N_k+1} ,$$

$$t(R_k) < 18.t_{N_{k+1}+1}.\lambda_k ,$$

et

$$\log|R_k(\theta_1, \dots, \theta_{q-1})| \leq -\frac{1}{900\,q}.\psi(N_{k+1}-1).\frac{\lambda_k}{t_{N_{k+1}}} .$$

Comme on s'en doute en comparant le cas $q = 1$ avec le critère (2.4) (et la remarque 2.10), cette proposition 4.2 peut être raffinée. Mais ici, un tel raffinement n'est pas utile.

Démonstration de la proposition 4.2 (d'après [3]). - Nous allons effectuer cette démonstration en 4 étapes.

Première étape (suite colorée). - Nous montrons l'existence d'une suite (Q_n) de polynômes non nuls de $\mathbb{Z}[X_1, \dots X_q]$ vérifiant, pour tout n suffisamment grand,

$$t(Q_n) < 3t_{n+1}$$

et

$$\log|Q_n(\theta_1, \dots, \theta_q)| < -\frac{1}{5}\psi(n) ;$$

de plus

- ou bien Q_n est puissance d'un polynôme irréductible,
- ou bien Q_n est premier à Q_{n-1} et à Q_{n+1}.

Pour cela, nous colorons la suite des entiers naturels de la manière suivante :

un entier $n \geqslant 0$ est <u>bleu</u> s'il existe un facteur Q_n de P_n, puissance d'un polynôme irréductible dans $\underset{\sim}{Z}[X_1, \dots, X_q]$, tel que

$$\log|Q_n(\theta_1, \dots, \theta_q)| \leqslant -\frac{1}{4}\psi(n) ;$$

un entier $n \geqslant 0$ est <u>rouge</u> sinon.

Montrons que, si n est rouge, il existe deux diviseurs $P_n^{(1)}$ et $P_n^{(2)}$ de P_n, premiers entre eux dans $\underset{\sim}{Z}[X_1, \dots, X_q]$, vérifiant

$$(4.4) \qquad \log|P_n^{(i)}(\theta_1, \dots, \theta_q)| < -\frac{1}{4}\psi(n) \qquad (i = 1, 2).$$

Pour cela, on décompose P_n en produit de puissances de polynômes irréductibles deux-à-deux distincts :

$$P_n = P_{n,1} \dots P_{n,h},$$

avec

$$|P_{n,1}(\theta_1, \dots, \theta_q)| \leqslant \dots \leqslant |P_{n,h}(\theta_1, \dots, \theta_q)| .$$

Soit j un entier, $1 \leqslant j \leqslant h$, tel que

$$(4.5) \quad |P_{n,1}(\theta_1,\dots,\theta_q) \dots P_{n,j}(\theta_1,\dots,\theta_q)| < |P_{n,j+1}(\theta_1,\dots,\theta_q) \dots P_{n,h}(\theta_1,\dots,\theta_q)|$$

et

$$|P_{n,1}(\theta_1,\dots,\theta_q) \dots P_{n,j-1}(\theta_1,\dots,\theta_q)| \geqslant |P_{n,j}(\theta_1,\dots,\theta_q) \dots P_{n,h}(\theta_1,\dots,\theta_q)| .$$

Comme n est rouge, on a

$$\log|P_{n,j}(\theta_1, \dots, \theta_q)| > -\frac{1}{4}\psi(n) .$$

Or, on déduit de (4.5) :

$$|P_{n,1}(\theta_1, \dots, \theta_q) \dots P_{n,j}(\theta_1, \dots, \theta_q)| \leqslant \exp\{-\frac{1}{2}\psi(n)\},$$

d'où

$$|P_{n,1}(\theta_1, \dots, \theta_q) \dots P_{n,j-1}(\theta_1, \dots, \theta_q)| < \exp\{-\frac{1}{4}\psi(n)\} .$$

On choisit $P_n^{(1)} = P_{n,1} \dots P_{n,j-1}$ et $P_n^{(2)} = P_{n,j} \dots P_{n,h}$; alors (4.4) est vérifié.

Construisons maintenant Q_n par récurrence sur n (en partant par exemple de $Q_0 = 1$).

Supposons $Q_0, \dots, Q_{n-1}$ construits. Si n est bleu, alors Q_n existe, et l'inégalité $t(Q_n) \leqslant 2t_n$ résulte de (2.7) (qui est encore vrai à plusieurs variables). Si n est rouge, distinguons deux cas.

(a) $n+1$ est bleu, donc Q_{n+1} existe.

Comme le polynôme $Q_{n-1} \cdot Q_{n+1}$ a un degré au plus $2t_{n-1} + t_{n+1}$, il a au plus $2t_{n-1} + t_{n+1}$ facteurs irréductibles distincts. Comme les $2t_{n-1} + t_{n+1} + 1$

polynômes

$$P_n^{(1)} + \ell P_n^{(2)} \qquad (\ell \in \underset{\sim}{Z} , -2t_{n-1} \leq \ell \leq t_{n+1})$$

sont premiers entre eux deux-à-deux, l'un d'eux, soit Q_n , est premier à

$$Q_{n-1} Q_{n+1} .$$

La taille de Q_n est au plus

$$2t_n + \log(1 + \max\{2t_{n-1} , t_{n+1}\}) < 3t_{n+1}$$

(b) $n + 1$ est rouge.

On construit Q_n sous la forme $P_n^{(1)} + \ell P_n^{(2)}$, avec $0 \leq \ell \leq 2t_{n-1})$, premier à Q_{n-1} . Au pas suivant de la récurrence, on construira Q_{n+1} premier à Q_n , donc Q_n sera premier à $Q_{n-1}.Q_{n+1}$.

<u>Deuxième étape</u> : <u>Construction des suites</u> (N_k) <u>et</u> (λ_k). - Remarquons qu'il n'est pas possible qu'à partir d'un certain rang, tous les polynômes Q_n soient puissances d'un même polynôme irréductible. Sinon on aurait, en écrivant $Q_n = S^{q_n}$,

$$q_n < 3t_{n+1} ,$$

$$\log|S(\theta_1 , \dots , \theta_q) \leq - \frac{1}{5q_n} \psi(n) < - t_{n+1}$$

pour n suffisamment grand, et $\theta_1 , \dots , \theta_2$ seraient algébriquement dépendants.

Notons (N_k) la suite croissante des entiers naturels définie par les deux propriétés suivantes : pour tout k ,

Q_{N_k} et $Q_{N_{k+1}}$ sont premiers entre eux,

si $N_{k+1} > N_k + 1$, alors pour $N_k \leq m < N_{k+1}$, les polynômes Q_{N_k} et Q_m sont des puissances d'un même polynôme irréductible (On remarquera que m est alors bleu).

Nous noterons λ_k la taille de Q_{N_k} .

<u>Troisième étape</u> : <u>Construction d'une suite d'entiers</u> (s_k) . - <u>Montrons l'existence pour tout entier</u> k <u>suffisamment grand</u>, <u>d'un entier positif</u> s_k <u>tel que</u>

(4.6) $$s_k.\lambda_k < 3.(2q + 3)\ t_{N_{k+1}}$$

<u>et</u>

$$\log|Q_{N_k}(\theta_1 , \dots , \theta_q)| < -\frac{1}{5s_k} . \psi(N_{k+1} - 1) .$$

Soit k un entier suffisamment grand. Si $N_{k+1} = N_k + 1$, on choisit $s_k = 1$. Supposons $N_{k+1} > N_k + 1$. Alors $Q_{N_{k+1}-1}$ et Q_{N_k} sont puissances d'un même polynôme irréductible $S_k \in \underset{\sim}{Z}[X_1 , \dots , X_q]$:

$$Q_{N_{k+1}-1} = S_k^{a_k} , \qquad Q_{N_k} = S_k^{b_k} .$$

Remarquons que

$$\frac{a_k}{2}\, t(S_k) \leqslant t(S_k^{a_k})$$

et que

$$t(S_k^{b_k}) \leqslant (q + 1)\, b_k\, t(S_k) .$$

Soit s_k le plus petit entier $\geqslant a_k/b_k$; on a

$$s_k t(Q_{N_k}) < t(Q_{N_k}) + (q + 1)a_k\; t(S_k) < 3t_{N_k+1} + 2(q + 1)\; t(Q_{N_{k+1}-1}) < (6q + 9)\; t_{N_{k+1}}$$

et

$$s_k \log|Q_{N_k}(\theta_1 , \dots , \theta_q)| \leqslant \log|Q_{N_{k+1}-1}(\theta_1 , \dots , \theta_q)| .$$

<u>Quatrième étape</u> : <u>Le résultant</u> R_k <u>de</u> Q_{N_k} <u>et</u> $Q_{N_{k+1}}$ <u>par rapport à</u> X_q <u>vérifie les propriétés requises</u>. – En effet,

$$t(R_k) \leqslant 6 . t(Q_{N_k}) . t(Q_{N_{k+1}}) < 18\, \lambda_k . t_{N_{k+1}+1} ,$$

et

$$\log|R_k(\theta_1 , \dots , \theta_{q-1})| < - \frac{1}{5 s_k}\, \psi(N_{k+1} - 1) + 18\, \lambda_k . t_{N_{K+1}+1} .$$

D'après (4.3) et (4.6), on en déduit

$$\log|R_k(\theta_1 , \dots , \theta_{q-1})| < - \frac{1}{60\, s_k}\, \psi(N_{k+1} - 1) .$$

Finalement, en tenant compte de (4.6), on obtient le résultat annoncé.

Pour terminer la démonstration du critère (4.1), nous utiliserons le lemme suivant.

LEMME 4.7. – <u>Sous les hypothèses de la proposition</u> 4.2, <u>si</u> $(\theta_1 , \dots , \theta_{q-1})$ <u>a un type de transcendance</u> $\leqslant \tau$, <u>alors</u>

$$\psi(N_{k+1} - 1) \leqslant C_3\; t_{N_k+1}^{\tau-1} . t_{N_{k+1}}\; t_{N_{k+1}+1}^{\tau} ,$$

<u>où</u> C_3 <u>ne dépend que de</u> $\theta_1 , \dots , \theta_{q-1}$, τ <u>et</u> q .

<u>Démonstration du lemme</u> 4.7. – L'hypothèse signifie que, pour tout polynôme non nul $R \in \mathbb{Z}[X_1 , \dots , X_{q-1}]$, on a

$$- C_0\; t(R)^{\tau} \leqslant \log|R(\theta_1 , \dots , \theta_{q-1})| ,$$

où C_0 ne dépend que de $\theta_1 , \dots , \theta_{q-1}$, τ et q . On en déduit

$$\psi(N_{k+1} - 1) \cdot \frac{\lambda_k}{t_{N_{k+1}}} \leq (20)^\tau \cdot 900\, q \cdot C_0 \cdot t^\tau_{N_{k+1}+1}\, \lambda^\tau_k \ .$$

Comme $\lambda_k < 3 t_{N_k+1}$ et que $\tau \geq 1$, le lemme 4.7 est démontré.

<u>Démonstration du critère</u> (4.1). – Supposons θ_1 , θ_2 algébriquement indépendants; en particulier θ_1 est transcendant, et $\tau \geq 2$. Utilisons la proposition 4.2 avec $q = 2$, $\psi(n) = C_2\, n^{\tau+2}$, où C_2 est choisi suffisamment grand. On obtient une suite de polynômes non nuls $R_k \in \underset{\sim}{Z}[X]$ vérifiant

$$t(R_k) < 19\, N_{k+1}\, \lambda_k$$

et

$$\log|R_k(\theta_1)| \leq - \frac{1}{2000}\, N^{\tau+1}_{k+1}\, \lambda_k \ ,$$

avec $\lambda_k < 3N_k + 1$. D'après le lemme 4.7, on a

$$N_{k+2} < C_4\, N^{\tau-1}_{k+1} \ ,$$

où C_4 ne dépend que de θ_1 et τ . On en déduit

$$\max\{N_k\, \lambda_{k-1} \ , N_{k+1}\, \lambda_k \ , N_{k+2}\, \lambda_{k+1}\} < 3N_{k+1}\, N_{k+2} < 3C_4\, N^\tau_{k+1} \ ;$$

le critère (2.4) de Gel'fond montre alors que θ_1 est algébrique, ce qui contredit notre hypothèse.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BROWNAWELL (D. W.). – Sequences of diophantine approximations, J. Number Theory, t. 6, 1974, p. 11-21.

[2] BROWNAWELL (D. W.). – Gel'fond's method for algebraic independence, Trans. Amer. math. Soc., t. 210, 1975, p. 1-26.

[3] ČUDNOVSKIJ (G. V.). – Towards the Schanuel hypothesis ; algebraic curves near the point, Part I : General theory of coloured sequences. Part II : Fields of finite type of transcendence and coloured sequences ; resultants [en russe ; résumé en anglais], Acta math. Acad. Sc. Hungar. (à paraître).

[4] GEL'FOND (A. O.). – Transcendental and algebraic numbers. Translated from Russian. – New York, Dover Pulbications, 1960 ; [en russe] Moskva, GITTL, 1952.

[5] TIJDEMAN (R.). – On the algebraic independence of certain numbers, Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., Proc., Series A, t. 74, 1971, p. 146-162 ; et Indag. Math., t. 33, 1971, p. 146-162.

[6] WALDSCHMIDT (M.). – Nombres transcendants. – Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1974 (Lecture Notes in Mathematics, 402).

(Texte reçu le 28 septembre 1976)

Michel WALDSCHMIDT
Mathématiques, Tour 45-46
Université Pierre et Marie Curie (Paris-VI)
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05