

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MAURICE MIGNOTTE

## Sur le théorème de Thue-Siegel-Gel'fond-Dyson

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 17, n° 2 (1975-1976),  
exp. n° G19, p. G1-G7

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1975-1976\\_\\_17\\_2\\_A21\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_2_A21_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LE THÉOREME DE THUE-SIEGEL-GEL'FOND-DYSON

par Maurice MIGNOTTE

RÉSUMÉ. - On cherche à déterminer pour tout entier  $d$  un nombre  $\rho_0 = \rho_0(d)$ , aussi petit que possible, tel que, pour tout  $\alpha$  algébrique de degré  $d$ , on puisse calculer toutes les solutions de l'inégalité  $|\alpha - (p/q)| < q^{-\rho}$  sauf peut-être l'une d'entre elles lorsque  $\rho$  vérifie  $\rho > \rho_0(d)$ . Les valeurs de  $\rho_0(d)$  obtenues améliorent celles de DAVENPORT et de SCHINZEL.

1. Introduction

1° Soit  $\alpha$  un nombre algébrique de degré  $d \geq 3$ . LIOUVILLE a démontré qu'il existe une constante calculable  $C = C(\alpha)$  telle que l'on ait  $|\alpha - (p/q)| > Cq^{-d}$  pour tout rationnel  $p/q$  ( $q > C$ ).

Considérons l'inéquation:

$$(1) \quad |\alpha - p/q| < q^{-\rho},$$

où  $p$  et  $q$  sont des entiers premiers entre eux ( $q > 0$ ). Après les résultats de THUE, SIEGEL, DYSON, GEL'FOND, en 1955 ROTH réussit à démontrer que, pour  $\rho > 2$  fixé, l'inéquation (1) n'a qu'un nombre fini de solutions. La méthode utilisée dans ces différents travaux ne conduit pas à des résultats effectifs mais permet de borner le nombre de solutions de (1) pour certaines valeurs de  $\rho < d$ . Nous allons étudier le problème suivant :

$d$  étant donné supérieur à deux, déterminer  $\rho_0 = \rho_0(d) < d$  tel que, pour tout  $\alpha$  algébrique, de degré  $d$ , on sache calculer toutes les solutions de (1) sauf peut-être l'une d'entre elles lorsque  $\rho$  vérifie  $\rho > \rho_0(d)$ .

L'existence de  $\rho_0(d)$  a été démontrée par DAVENPORT [2] et, indépendamment, par SCHINZEL (pour  $d \geq 5$ ) [8]. Il s'agit bien entendu de déterminer une valeur de  $\rho_0(d)$  aussi petite que possible. Les valeurs obtenues figurent dans la table ci-dessous.

d	SCHINZEL	DAVENPORT	notre méthode
3		2,732	
4		3,828	3,415
5	4,743	4,236	3,646
6	5,196	4,832	4,236
7	5,612	5,238	4,622
8	6	5,899	5
9	6,364	6,357	5,677
10	6,708	6,916	6,154
11	7,305	7,326	6,563
12	7,348	7,928	6,929

2° Depuis les travaux de BAKER, on connaît des améliorations effectives du théorème de Liouville. Le meilleur résultat général est dû à BAKER [1] et FEL'DMAN [3] qui ont démontré l'existence de constantes positives effectives  $C_4 = C_4(\alpha)$  et  $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$  telles que l'on ait

$$|\alpha - p/q| > C_4 q^{-d+\varepsilon}$$

pour tout rationnel  $p/q$ ,  $q > 0$ .

3° L'étude de l'inéquation (1) est très liée à la résolution de certaines équations diophantiennes. Soit en effet une équation du type

$$(2) \quad f(X, Y) = g(X, Y),$$

où  $f$  est une forme binaire à coefficients entiers, irréductible (sur  $\mathbb{Q}$ ) de degré  $d$  ( $d \geq 3$ ), et  $g$  un polynôme de degré  $d' < d$ . On a évidemment la majoration

$$|g(x, y)| \leq C_2(|x| + |y|)^{d'};$$

pour résoudre (2) on est amené à chercher une minoration de  $|f(x, y)|$  lorsque  $x$  et  $y$  sont entiers. Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$  les racines du polynôme  $f(x, 1)$ ; il est facile de déterminer une constante positive  $C_3$  telle que l'on ait

$$|f(x, y)| \geq C_3(|x| + |y|)^d \cdot \min_{1 \leq i \leq d} |x/y - \alpha_i|.$$

S'il existe  $\rho < d$  tel que, pour tout nombre algébrique  $\alpha$  de degré  $d$ , l'équation (1) n'a qu'un nombre fini de solutions, alors (2) n'a qu'un nombre fini de solutions si  $d'$  vérifie  $d' < d - \rho$ .

Du théorème de Roth résulte donc que, pour  $d' \leq d - 3$ , l'équation (2) n'a qu'un nombre fini de solutions. En fait, SCHINZEL [7] a étendu ce résultat pour  $d' < d$ .

Le théorème de Baker et Fel'dman entraîne la résolution effective des équations de Thue

$$f(X, Y) = a,$$

où  $a$  est constant.

4° Supposons qu'il existe  $p$  tel que, pour tout  $\alpha$  algébrique de degré  $d$ , on sache déterminer  $Q = Q(\alpha)$  tel que (1) possède au plus  $N$  solutions irréductibles vérifiant  $q > Q(\alpha)$ . Les solutions du (1) vérifiant  $xy = 0$ , peuvent être déterminées effectivement. Soit donc  $(x', y')$  une solution de (1), avec  $y' \neq 0$ . Soit  $t$  l'entier défini par la condition  $x' = ty$ ,  $y' = ty$  où  $x$  et  $y$  sont premiers entre eux,  $y$  positif. Alors  $t$  est solution d'un polynôme non nul de degré  $d$ , et prend donc au plus  $d$  valeurs. Le nombre  $N_1$  de solutions de (2) qui vérifient  $|x| + |y| > M$ , est majoré par  $d$  fois le nombre de solutions de l'inégalité

$$|f(x, y)| \leq C_2(|x| + |y|)^{d'} \quad \text{avec } (x, y) = 1, \quad |x| + |y| > M.$$

Pour une solution de cette inégalité, il existe un indice  $i$  tel que l'on ait

$$|x/y - \alpha_i| \leq C_4(|x| + |y|)^{d'-d}.$$

En choisissant  $M$  assez grand, on trouve donc

$$N_1 \leq d^2 N.$$

On peut ainsi démontrer le résultat suivant (voir [5]).

Pour  $d' < d - 2$ , on peut déterminer toutes les solutions de (2) sauf au plus

$$2^7(d+1)^{6,5} \log(d+1)$$

d'entre elles.

## 2. Un raffinement du théorème de Gel'fond

1° En [6], chapitre II, figure le résultat suivant, qui améliore le théorème 1, chapitre I de [4].

THÉORÈME 1. - Pour  $\rho > \sqrt{2\lambda d}$ ,  $\lambda > 1$ , si (1) admet une solution irréductible  $p_1/q_1$ , où  $q_1 > Q(\alpha, \lambda)$  (effectif), alors toute autre solution  $p_2/q_2$ , avec  $q_2 > q_1$ , vérifie

$$\frac{\log q_2}{\log q_1} < \frac{2d(\rho - 1)}{\rho^2 - 2d}.$$

2° Considérons deux solutions irréductibles  $p_1/q_1$  et  $p_2/q_2$  de (1),  $q_2 > q_1 > C$ .

On a

$$1 \leq |p_1 q_2 - p_2 q_1| \leq q_2 |p_1 - \alpha q_1| + q_1 |p_2 - \alpha q_2| < q_2 q_1^{-\rho+1} + q_1 q_2^{-\rho+1} < 2q_1 q_2^{-\rho+1},$$

et donc  $2q_2 > q_1^{\rho-1}$ . Posons  $\omega = \lg q_2 / \lg q_1$ . Soit  $\eta > 0$  fixé, d'après l'inégalité précédente et le théorème 1, on a

$$(3) \quad \rho - 1 - \eta < \omega < 2d(\rho - 1)(\rho^2 - 2d)^{-1} + \eta \quad \text{si } q_1 > C_5.$$

D'où, en particulier, la proposition suivante

PROPOSITION 1. - Soit  $\alpha$  algébrique de degré  $d$ , alors pour  $\rho > 2\sqrt{d}$ , on peut déterminer toutes les solutions irréductibles de l'inéquation

$$|\alpha - p/q| < q^{-\rho}$$

sauf au plus l'une d'entre elles.

(En d'autres termes, on peut choisir  $\rho_0(d) = 2\sqrt{d}$ . Grâce au théorème de Gel'fond, SCHINZEL [8] obtenait  $\rho_0 = 3\sqrt{d/2}$ .)

### 3. La méthode de Thue

1° Nous aurons besoin des deux résultats ci-dessous, qui sont démontrés en [6] (chapitre II, §5).

LEMME 1. - Soit  $\alpha$  algébrique de degré  $d > 1$ . Les seuls polynômes à coefficients entiers de degré au plus  $d + \ell - 2$  vérifiant

$$P_C^{(i)}(\alpha) + \alpha P_1^{(i)}(\alpha) = C, \quad i = 0, 1, \dots, \ell - 1,$$

où  $\ell$  est un entier  $\geq 3$ , sont les polynômes nuls.

LEMME 2. - Soit  $h(X) = f(X)/g(X)$  une fraction rationnelle sur  $\mathbb{Z}$ , irréductible, non nulle, de degré  $d$  (égal au maximum des degrés de  $f$  et  $g$ ). Soit  $a$  un nombre rationnel tel que  $f(a)g(a)$  soit non nul, alors il existe deux constantes positives effectives  $C_6$  et  $C_7$  telles que l'on ait

$$C_6 \|a\|^d \leq \|h(a)\| \leq C_7 \|a\|^d$$

(où, pour,  $x \in \mathbb{Q}$  admettant comme écriture irréductible  $x = p/q$ , on note

$$\|x\| = \max(|p|, |q|);$$

$C_6$  et  $C_7$  ne dépendent que de  $d$  et du maximum des hauteurs de  $f$  et  $g$ .)

2° Rappelons que dans la méthode de Thue on construit des fonctions polynômes auxiliaires à coefficients entiers,

$$h(X, Y) = P_0(X) + YP_1(X),$$

où les  $P_i$  ont pour degré maximal  $r$ , et qui vérifient

$$\frac{\partial^h}{\partial x^h} A(\alpha, \alpha) = 0 \text{ pour } h = 0, 1, \dots, \ell - 1 \quad (\ell \geq 2).$$

Ici il nous suffira de considérer un nombre fini de valeurs de  $\ell$ . Il en résulte que la hauteur de  $A$  sera majorée par une constante ne dépendant que de  $\alpha$ . Considérons à nouveau deux solutions irréductibles  $p_1/q_1$  et  $p_2/q_2$  de (†) vérifiant  $q_2 > q_1 > C_5$ . Pour aboutir à une contradiction, il nous suffit de démontrer que  $\omega$  ne peut appartenir à l'intervalle (3). Soit  $j$  minimal tel que le nombre

$$\gamma = \frac{\partial^j}{\partial x^j} A(p_1/q_1, p_2/q_2)$$

soit non nul; alors  $j \leq 1$ . Il est facile d'encadrer  $\gamma$ ; on a

$$q_1^{-r+j} q_2^{-1} \leq |\gamma| < e^{C_8} \max\{q_1^{-p}(\ell-j), q_2^{-\ell}\}.$$

Il en résulte que  $\omega$  n'appartient pas à l'intervalle

$$I_\ell = [\alpha(r, j) - \eta, \beta(r, j) + \eta],$$

où

$$\alpha(r, j) = (r - j)/(p - 1), \quad \beta(r, j) = p(\ell - j) - (r - j),$$

dès que  $q_1$  vérifie  $q_1 > \exp(C_8/\eta)$  (ce qu'on supposera).

La contradiction cherchée sera obtenue si on trouve une famille de tels intervalles  $I_\ell$  qui recouvre l'intervalle (3); si  $\rho_d$  désigne un nombre tel que, pour  $\rho > \rho_d$ , cette condition ait lieu, on pourra choisir  $\rho_0(d) = \rho_d$ .

3° Il nous faudra utiliser des informations précises sur les fonctions auxiliaires  $A$ . Nous ne considérerons que des polynômes  $A$  de degré minimal; ce qui impose que le p. g. c. d. de  $P_0$  et  $P_1$  est une puissance du polynôme minimal de  $\alpha$ , et que  $r$  vérifie  $r \leq [d\ell/2]$ .

Notons aussi que: si  $A((p_2/q_1), (p_2/q_2))$  est nul, et si  $Q_0 = P_0/D$ ,  $Q_1 = P_1/D$ , on a

$$Q_0(p_1/q_1)/Q_1(p_1/q_1) = -q_2/p_2.$$

On peut borner explicitement les hauteurs de  $Q_0$  et de  $Q_1$ . En appliquant le lemme 2, on obtient l'implication

$$(4) \quad (j = 1 \text{ et } q > C_9) \Rightarrow (r - \deg D - \eta < \omega < r - \deg D + \eta);$$

nous supposons désormais  $q > C_9$ .

4° Pour simplifier, nous ne considérerons que le cas  $d = 4$ ; pour  $d = 3$ , nous renvoyons le lecteur à l'article de DAVENPORT [2].

Supposons  $\rho > (3 + \sqrt{13})/2$  et  $q_1$  assez grand. Posons

$$\alpha_\ell = 2\ell/(\rho - 1), \quad \beta_\ell = \ell(\rho - 2).$$

Pour  $\ell \geq 2$ , on a

$$\beta_\ell - \alpha_{\ell+1} > 0, \quad \alpha_2 < \rho - 1, \quad \beta_4 > \alpha_6.$$

Considérons particulièrement le cas  $\ell = 6$ . On a donc  $\alpha(6, j) \leq \alpha_6 < 6$ . Minorons  $\beta(6, j)$ . Si  $r$  est au plus égal à 11, alors on a  $\beta(6, j) \geq \beta_5$ . Sinon, on peut trouver deux solutions  $h = P_0 + YP_1$ ,  $h_1 = P_2 + YP_3$  telles que

$$\deg P_0 = \deg P_3 = 12 \text{ et } \deg P_1 < 12, \text{ } \deg P_2 < 12.$$

Le polynôme  $P_0 P_3 - P_1 P_2$  n'est pas nul, on peut donc trouver  $\gamma$  non nul avec  $j = 0$ . Dans les deux cas, on a (pour  $\eta$  assez petit)

$$\beta(6, j) > 2d(\rho - 1)(\rho^2 - 2d)^{-1} + \eta$$

et donc, d'après (3),

$$\omega < \alpha_6 + \eta < 6 - \eta.$$

Pour  $\ell = 4$ , on a  $6 \leq r \leq 8$  (la majoration est triviale, la minoration résulte du lemme 1),  $D = 1$  car  $r > 4$  pour  $\ell = 3$  (appliquer à nouveau le lemme 1). La majoration  $\omega < 6 - \eta$  jointe à (4) montre que  $j$  est nul. Donc

$$\omega < \alpha_4 + \eta < 5 - \eta.$$

Pour  $\ell = 3$ , on a  $5 \leq r \leq 6$  et  $D = 1$  (car  $r \geq 4$  pour  $\ell = 2$ ); la relation (4) montre encore que  $j$  est nul. Donc

$$\omega < \alpha_3 + \eta < 4 - \eta.$$

Pour  $\ell = 2$ , on a  $r = 4$ ,  $D = 1$  et  $j = 0$ . L'intervalle (3) est recouvert, ainsi  $\rho_4 = (3 + \sqrt{13})/2$  convient. Nous avons donc démontré la proposition suivante.

**PROPOSITION 2.** - Soit  $\alpha$  un nombre algébrique de degré 4. Alors, pour

$$\rho > (3 + \sqrt{13})/2,$$

on peut déterminer toutes les solutions irréductibles de l'inégalité

$$|\alpha - p/q| < q^{-\rho}$$

sauf au plus l'une d'entre elles.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAKER (A.). - A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms, II, Acta Arithm., Warszawa, t. 24, 1973, p. 33-36.
- [2] DAVENPORT (H.). - A note on Thue's theorem, Mathematika, London, t. 15, 1968, p. 76-87.
- [3] FEL'DMAN (N. I.). - An effective refinement of the exponent in Liouville's theorem, Math. USSR-Izv#stija, t. 5, 1971, p. 985-1000; et [en russe] Izvest. Akad. Nauk SSSR, Serija mat., t. 35, 1971, p. 973-990.

- [4] GEL'FOND (A. O.). - Transcendental and algebraic numbers. - New York, Dover Publications, 1960 ; et [en russe] Moskva, Edition d'Etat de Littérature technique, 1952.
- [5] MIGNOTTE (M.). - Quelques remarques sur l'approximation rationnelle des nombres algébriques, *J. für reine und angew. Math.*, t. 262-263, p. 341-347.
- [6] MIGNOTTE (M.). - Approximation rationnelle des nombres algébriques, Cours professé à Orsay, 1975 (à paraître).
- [7] SCHINZEL (A.). - An improvement of Runge's theorem on diophantine equations, *Comment. Pontificia Acad. Sc.*, 2, 1969, n° 20, p. 1-9.
- [8] SCHINZEL (A.). - Review of a paper by Hyman, *Zentralbl. für Math.*, t. 137, 1967, p. 257-258.

(Texte reçu le 21 septembre 1976)

Maurice MIGNOTTE  
Centre de Calcul  
Université Louis Pasteur  
7 rue René Descartes  
67084 STRASBOURG CEDEX

---