Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

THONG NGUYEN-QUANG-DO

# Une réciproque du théorème 90 de Hilbert

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 17, n° 2 (1975-1976), exp. n° G18, p. G1-G3

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_2_A20_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'études de Theorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° G18, 3 p. 

12 avril 1976

# UNE RÉCIPROQUE DU THÉORÈME 90 DE HILBERT

par NGUYEN-QUANG-DO Thong

## 1. Introduction

Nous exposons ici certains résultats de cohomologie galoisienne des corps locaux dus à NAKAYAMA, TANNAKA et d'autres (voir références de [1]). Toutes les extensions seront supposées de degré fini.

Si $K/k$ est une extension galoisienne, de groupe de Galois $G$, nous noterons $H^i(K/k)$ les groupes de cohomologie $\hat{H}^i(G, K^*)$ au sens de TATE [3]. Soit $N_{K/k}$ la norme de $K^*$ à $k^*$. Nous designerons respectivement par $N(K/k)$ et $N(k/K)$ l'image et le noyau de cet homomorphisme.

1.1. THÉORÈME 90 de Hilbert (bien connu !). - Si $K/k$ est cyclique, de groupe de Galois engendré par $\sigma$, $N(k/K) = K^{*1-\sigma}$.

La généralisation cohomologique (tout aussi bien connue) de ceci est le théorème suivant :

1.2. THÉORÈME. - Pour toute extension galoisienne $K/k$, $H^1(K/k) = (1)$.

De façon plus naturelle, on aurait pu regarder le groupe $H^{-1}(K/k)$, qui, par définition, est égal au quotient $N(k/K)/K_G^{1-\sigma}$, où $K_G^{1-\sigma}$ désigne le groupe engendré par les éléments $a.\sigma(a)^{-1}$, $a \in K^*$, $\sigma \in G = \mathrm{Gal}(K/k)$. C'est ce qu'on va faire dans le cas d'une extension de corps locaux.

## 2. Structure de $H^{-1}(K/k)$.

Soit $K/k$ une extension galoisienne de corps locaux. Par le corps de classes, on sait que $H^2(K/k)$ est un groupe cyclique, d'ordre égal à $[K : k]$ [3].

2.1. THÉORÈME. - Soit $\alpha$ un générateur de $H^2(K/k)$. Supposons l'extension $K/k$ abélienne. Alors $H^{-1}(K/k)$ admet un système de représentants dans $K^*$ formé des éléments $\alpha_{\sigma,\tau}\,\alpha_{\tau,\sigma}^{-1}$, $\sigma$ et $\tau$ parcourant $G = \mathrm{Gal}(K/k)$.

Preuve. - Elle se fait par récurrence. Soit $G = Z_1 \times Z_2 \times \ldots \times Z_n$ une décomposition de $G$ en produit de groupes cycliques $Z_i = \langle\sigma_i\rangle$ d'ordre $n_i$, $n_{i+1} | n_i$. Soit $H = Z_1 \times \ldots \times Z_{n-1}$, de corps fixe $M$.

Pour tout $x \in N(k/K)$, $N_{K/M}(x) \in N(k/M)$, donc (théorème 90) est de la forme $b.\sigma_n(b)^{-1}$. Mais on sait que l'homomorphisme qui, à tout $\sigma \in H$, associe $\alpha_{\sigma,H} = \prod_{\tau\in H} \alpha_{\sigma,\tau}$, est un isomorphisme de $H$ sur $M^*/NK^*$ (c'est un cup-produit, [3], p. 177 ; pour une démonstration non cohomologique, voir [2]). Donc

$b \equiv \alpha_{\sigma,H}$ (mod $N(K/M)$) , $\sigma \in H$ ,

$$b \equiv \prod_{i=1}^{n-1} \alpha_{\sigma_i,H}^{q_i} ,$$

d'où

$$N_{K/M}(x) \equiv \prod_{i=1}^{n-1} (\alpha_{\sigma_i,H}^{1-\sigma_n})^{q_i} .$$

Mais

$$\alpha_{\sigma_i,H}^{1-\sigma_n} = N_{K/M}(\alpha_{\sigma_n,\sigma_i}\,\alpha^{-1}_{\sigma_i,\sigma_n}) \quad \text{(calculs faciles de cocycles)} ,$$

d'où

$$N_{K/M}(x) = N_{K/M}(\prod_{i=1}^{n-1} \alpha_{\sigma_n,\sigma_i}\,\alpha^{-1}_{\sigma_i,\sigma_n})^{q_i}\; N_{K/M}(y^{1-\sigma_n}) , \quad y \in K^* ,$$

et l'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

C. Q. F. D.

2.2. THÉORÈME. - Avec les hypothèses et les notations de (2.1.),

$$H^{-1}(K/k) \simeq A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n , \text{ où } A_i = Z_i \times Z_{i+1} \times \dots \times Z_n .$$

Preuve. - Pour tout couple $(i , j)$ , $i < j$ , regardons le groupe engendré par $\alpha_{\sigma_i,\sigma_j}\,\alpha^{-1}_{\sigma_j,\sigma_i}$ (mod $K_G^{1-\sigma}$) . Soit $n_{i,j}$ l'ordre de ce groupe.

Soit $J$ le sous-groupe de $G$ obtenu en enlevant $Z_i \times Z_j$ ; soit $L$ son corps fixe. Si $(\alpha_{\sigma_i,\sigma_j}\,\alpha^{-1}_{\sigma_j,\sigma_i})^{n_{ij}} \in K_G^{1-\sigma}$ , alors $(\alpha^J_{\sigma_i,\sigma_j}/\alpha^J_{\sigma_j,\sigma_i})^{n_{ij}} \in L_{G/H}^{1-\tau}$ .

Or on a le lemme suivant.

LEMME. - Soit $L/k$ galoisienne, de groupe de Galois isomorphe à $Z_1 \times Z_2$ , où $Z_i = \langle \tau_i \rangle$ , $i = 1 , 2$ , sont deux groupes cycliques d'ordre $n_i$ , $n_2 | n_1$ . Alors $H^{-1}(L/k)$ est cyclique d'ordre $n_2$ .

En effet, soit $L_i$ le corps fixe de $H_i$ $(i = 1 , 2)$ .

Avec des notations évidentes, si

$$(\beta_{\tau_1,\tau_2}\,\beta^{-1}_{\tau_2,\tau_1})^q = \theta_1^{1-\tau_1}\,\theta_2^{1-\tau_2} , \quad \theta_i \in L^* ,$$

en prenant la norme de $L$ à $L_2$ , on obtient :

- au premier membre : $(\beta_{\tau_2,H_2}^{1-\tau_1})^q = (\beta^q_{\tau_2,H_2}\, N_{K/L_2}\theta_3)^{1-\tau_1}$ , $\theta_3 \in L^*$ ,

- au second membre : $(N_{K/L_2}\theta_1)^{1-\tau_1}$ ;

d'où

$$\beta_{\tau_2^q,H_2}^{1-\tau_1} = (N_{K/L_2}\theta)^{1-\tau_1} , \quad \theta \in L^*$$

i. e.

$$\beta_{\tau_2^q,H_2} = \alpha . N_{K/L_2}\theta , \quad \alpha \in k^* .$$

Mais $N_{L_1/k}\,\alpha = \alpha^{n_1} = (\alpha^{n_1/n_2})^{n_2} \in N(L_{2/k})$ , d'où (propriété connue du corps de classes) $\alpha \in N(K/L_2)$ . Il en résulte que $\rho_{\tau_2^q, H_2} \in N(K/L_2)$ , d'où $\tau_2^q = 1$ , et le lemme est démontré.

Reprenons la démonstration du théorème :

D'après le lemme, $n_{ij} = n_j$ , et il en résulte facilement que

$$H^{-1}(K/k) \simeq A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n \text{ , où } A_i = Z_i \times Z_{i+1} \times \dots \times Z_n \text{ .}$$

C. Q. F. D.

2.3. COROLLAIRE (réciproque du théorème 90 de Hilbert). - <u>Soit</u> $K/k$ <u>une extension abélienne de corps locaux telle que</u> $H^{-1}(K/k) = (1)$ . <u>Alors l'extension</u> $K/k$ <u>est cyclique</u>.

<u>Preuve</u>. - Elle est immédiate.

<u>Remarque</u>. - Ce résultat n'est pas valable si $K/k$ n'est pas supposée abélienne . En effet, si $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ est tel que $G'$ (=groupe des commutateurs) et $G/G'$ sont cycliques, on voit facilement que $H^{-1}(K/k) = (1)$ .

BIBLIOGRAPHIE

[1] KUNIYOSHI (H.). - On a certain group concerning the p-adic number field, Tôhoku math. J., t. 1, 1950, p. 186-193.

[2] NAKAYAMA (T.). - Über die Beziehungen zwischen den Faktorensystemen und der Normklassengruppe eines galoisschen Erweiterungskörper, Math. Annalen, t. 112, 1936, p. 85-91.

[3] SERRE (J.-P.). - Corps locaux. - Paris, Hermann, 1968 (Act. scient. et ind., 1296 ; Publ. Inst. Math. Univ. Mancago, 8).

(Texte reçu le 12 avril 1976)

NGUYEN-QUANG-DO Thong
49 rue Pierre Valette
92240 MALAKOFF