Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Marie-France Vignéras

Invariants des groupes modulaires de Hilbert sur un corps quadratique

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, nº 2 (1975-1976), exp. nº G9, p. G1-G10

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_2_A15_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de Théorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° G9, 10 p.

5 janvier 1976

INVARIANTS DES GROUPES MODULAIRES DE HILBERT SUR UN CORPS QUADRATIQUE

par Marie-France VIGNÉRAS

On connait l'intérêt de la théorie des formes modulaires à une variable dans la théorie des fonctions automorphes et dans l'arithmétique des nombres rationnels. Nous allons aujourd'hui parler des formes modulaires de Hilbert et, en particulier, de leurs liens avec les thèmes suivants :

1° Exemples de fonctions à plusieurs variables.

2° Exemples de variétés algébriques (cf. HIRZEBRUCH pour les surfaces modulaires de Hilbert) possédant des propriétés remarquables.

3° Nombre de représentations d'un nombre algébrique par des formes quadratiques à coefficients entiers algébriques. Nombre de classes de ces formes quadratiques.

Quoique les considérations que nous ferons s'étendent à tous les corps totalement réels K, nous allons nous restreindre, dans cet exposé, aux corps réels quadratiques $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $D > 0$.

1. Les surfaces modulaires de Hilbert.

Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ un corps réel quadratique, de discriminant $D > 0$. Le nombre D est entier, congru à 0 ou 1 modulo 4, et sans facteurs carrés impairs. Les premiers discriminants possibles sont $D = 5, 8, 12, 13, 17, \ldots$

On note $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[1, \omega]$ l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, et ε l'unité fondamentale de $\mathcal{O}$. Si $a \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, on note a' son conjugué par le $\mathbb{Q}$-automorphisme non trivial de $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$; l'application $a \to (a, a')$ définit un plongement φ de $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ dans $\mathbb{R}^2$. On dit que a est totalement positif, $a \gg 0$, si a et a' sont tous les deux positifs. Soit

$$\Gamma = \{\gamma \in \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} \quad \det \gamma = 1\} ;$$

alors $\overline{\Gamma} = \Gamma/\{\pm 1\}$ est <u>le groupe modulaire de Hilbert</u> (classique). Par l'extension naturelle de φ à Γ, le groupe Γ se plonge dans $GL_2^+(\mathbb{R})^2$. Soit $\mathcal{H}$ le demi-plan supérieur ; le groupe $GL_2^+(\mathbb{R})^2$ opère sur $\mathcal{H}^2$ de la façon suivante : si $g = (g_1, g_2) \in GL_2^+(\mathbb{R})^2$ et $z = (z_1, z_2) \in \mathcal{H}^2$, on pose $gz = (g_1 z_1, g_2 z_2)$ avec

$$g_i z_i = \frac{a_i z_i + b_i}{c_i z_i + d_i} \qquad g_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}, \quad a_i d_i - b_i c_i > 0, \; i = 0, 1 .$$

L'opération ci-dessus introduit une opération de $\overline{\Gamma}$ sur $\mathcal{H}^2$ <u>discontinue</u>. Soit

$\mathfrak{F}$ un domaine fondamental, représentant <u>la surface modulaire de Hilbert</u> $\mathcal{H}^2/\bar{\Gamma}$.

Ce domaine $\mathfrak{F}$ n'est jamais compact, il possède des pointes (ou points paraboliques), c'est-à-dire des points qui sont les images des points fixes des transformations paraboliques de Γ . Il est facile de voir que $P_1 K$ est l'ensemble des points fixes des transformations paraboliques de Γ . Le nombre de pointes est le nombre de points fixes (paraboliques) Γ-inéquivalents.

THÉORÈME 1. - <u>Le nombre de pointes est</u> $h(D)$.

(On note $h(D)$ le nombre de classes de $\underset{\sim}{Q}(\sqrt{D})$.)

Par exemple, $\mathfrak{F}$ n'a qu'une pointe ∞ , pour

$$D = 5 \; , \; 8 \; , \; 12 \; , \; 13 \; , \; 17 \; , \; 21 \; , \; 29 \; , \; 33 \; , \; 37 \; , \; 44 \; \ldots$$

Par contre, $\mathfrak{F}$ a deux pointes pour $D = 40$, 60 , ...

Ce domaine $\mathfrak{F}$ possède des singularités qui correspondent aux points elliptiques (points de $\mathcal{H}^2$ dont le groupe d'isotropie dans $\bar{\Gamma}$ n'est pas nul). On note a_r le nombre de points elliptiques dans $\mathfrak{F}$ admettant un groupe d'isotropie dans $\bar{\Gamma}$ d'ordre r . Le nombre a_r est relié aux nombres de classes des corps quadratiques imaginaires. Soit ξ_r une racine de l'unité d'ordre r si r est un nombre premier impair, d'ordre 4 si $r = 2$.

THÉORÈME 2. - <u>Si</u> $[K(\xi_r) : K] > 2$, $a_r = 0$, <u>sinon</u>

$$a_r = (2) \sum_{O,\, \xi_r \in O} h'(O)$$

<u>où la somme porte sur les ordres O des extensions quadratiques totalement imaginaires de $\underset{\sim}{Q}(\sqrt{D})$ contenant ξ_r ; $h'(O)$ est le nombre de classes de O divisé par $h(D)$ (ce nombre est un entier), et on pose</u>

$$(2) = \begin{cases} 2 & \underline{\text{si}} \quad [N(O^*) : E^2] = 1 \, , \\ 1 & \underline{\text{si}} \quad [N(O^*) : E^2] = 2 \, . \end{cases}$$

(N = la norme de $\underset{\sim}{Q}(\sqrt{D}\,,\,\xi_r)$ sur $\underset{\sim}{Q}(\sqrt{D})$, et $E = \{\mp \varepsilon^n \, , \; n \in \underset{\sim}{Z}\}$ est le groupe des unités de $\underset{\sim}{Q}(\sqrt{D})$, O^* le groupe des unités de O . L'indice $[N(O^*) : E^2]$ est l'indice de Hasse de O .)

En utilisant la formule de Dedekind, on exprime $h'(O)$ en fonction du nombre de classes relatif de $\underset{\sim}{Q}(\sqrt{D}\,,\,\xi_r)$ qui est un nombre de classes d'un corps quadratique imaginaire dans les cas qui nous intéressent. On obtient comme conséquence le corollaire suivant.

COROLLAIRE.

<u>Pour</u> $D = 5$, <u>on a</u> $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_5 = 1$,
$D = 8$, <u>on a</u> $a_2 = 1$, $a_4 = 1$, $a_3 = 1$

$D = 12$, <u>on a</u> $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_{16} = 1$.

<u>Pour</u> $D \neq 5$, 8 , 12 , <u>on a</u> $a_2 = \lambda_2\ h(-m)$

$$a_3 = \lambda_3\ h(-3m)$$

<u>où on a posé</u>

$$D = m \quad \text{si} \quad D \equiv 1 \mod 4$$

$$D = 4m \quad \text{si} \quad D \equiv 0 \mod 4 .$$

<u>Les valeurs de</u> λ_2 <u>et</u> λ_3 <u>dépendent des congruences de</u> m <u>modulo</u> 8 <u>ef</u> 9 .

Par exemple, si les indices de Hasse des corps $\underset{\sim}{Q}(\sqrt{D}, \sqrt{-1})$ et $\underset{\sim}{Q}(\sqrt{D}, \sqrt{-3})$ sont égaux à 1 , on a

$$\lambda_2 = \begin{cases} 1 & m \equiv 1 \mod 4 \\ 3 & m \equiv 2 \mod 4 \\ 4 & m \equiv 4 \mod 8 \\ 10 & m \equiv 3 \mod 8 \end{cases}$$

$$\lambda_3 = \begin{cases} 1 & m \equiv 0 \mod 3 \\ 3 & m \equiv 6 \mod 9 \\ 5 & m \equiv 9 \mod 9 \end{cases}$$

Soit $z = x + iy \in \mathcal{H}$ et $(z_1 , z_2) \in \mathcal{H}^2$. On introduit la forme de Gauss-Bonnet

$$\omega = \frac{1}{4\pi^2} \frac{dx_1 \wedge dy_1}{y_1^2} \wedge \frac{dx_2 \wedge dy_2}{y_2^2}$$

(élément de volume invariant par l'action de Γ).

Rappelons que, pour le groupe modulaire classique $SL_2(\underset{\sim}{Z})/\{\mp 1\}$, on a

$$\int_{\mathcal{H}/SL_2(\underset{\sim}{Z})} \left(-\frac{1}{2\pi}\right) \frac{dx \wedge dy}{y^2} = 2\zeta_{\underset{\sim}{Q}}(-1) = -1/6 .$$

La formule du volume de $\mathfrak{F}$ pour ω généralise cette relation.

THÉORÈME 3. – $\int_{\mathfrak{F}} \omega = 2\zeta_{\underset{\sim}{Q}(\sqrt{D})}(-1)$.

La méthode la plus simple pour calculer $\zeta_K(-1)$ est la relation :

$$2\zeta_K(-1) = \frac{1}{30} \sum_{|x|^2 < D,\, x \equiv D(2)} \sigma_1\left(\frac{D - x^2}{4}\right) .$$

Par exemple :

D	5	8	12	13	17	...
$2\zeta_K(-1)$	1/15	1/6	1/3	1/3	2/3	...

Les surfaces $\mathcal{H}^2/\Gamma$ compactifiées, dont les singularités ont été résolues, donnent des surfaces algébriques non singulières $Y(D)$ dont le genre arithmétique χ est défini par

$$\chi = 1 - g_1 + g_2 ,$$

où g_i est la dimension des formes différentielles holomorphes de degré i sur $Y(D)$ $(i = 1 , 2)$. En fait, ici $g_1 = 0$, et g_2 est la dimension des formes paraboliques de poids 2 pour Γ. Il est donné par une formule contenant des termes provenant du volume, des singularités et des pointes (voir le paragraphe 2). Il est relié au nombre de types $T(D)$ des ordres maximaux des corps de quaternions sur $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ non ramifiés.

THÉORÈME 4. - Si $D = p$ est un nombre premier, on a

$$\chi = T(p) = \frac{1}{4}[2\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{p})} + \sum_r a_r \frac{r-1}{r} .$$

COROLLAIRE. - Le genre arithmétique de $Y(p)$ est égal au nombre de classes des formes quaternaires quadratiques paires de déterminant p si p est un nombre premier congru à 5 modulo 8.

Car si $p \equiv 5 \mod P$, on sait que $T(p)$ est le nombre de classes des formes quaternaires quadratiques de déterminant p. On retrouve ainsi que $p = 5$, $p = 13$ sont les seuls cas où il n'existe qu'une forme quaternaire quadratique paire de discriminant p ($p \equiv 5 \mod 8$, premier). Ce sont les formes

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Les considérations que nous venons de faire se généralisent aux groupes

$$\Gamma_\pi = \{x \in \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \pi & \mathcal{O} \end{pmatrix} \quad \det x \gg 0 , \ \det x \in E\} ,$$

où π est un idéal sans facteurs carrés et même aux groupes

$$\Gamma_{\pi,\mathfrak{a}} = \{x \in \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathfrak{a}^{-1} \\ \pi\mathfrak{a} & \mathcal{O} \end{pmatrix} \quad \det x \gg 0 , \ \det x \in E\} ,$$

où $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$. On peut également les faire opérer sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}^-$, où $\mathcal{H}^-$ est le demi-plan inférieur.

On note $\chi_{\pi,\mathfrak{a}}$ et $\chi'_{\pi,\mathfrak{a}}$ les genres arithmétiques des surfaces modulaires (sans singularités compactes) obtenues avec $\mathcal{H}^2/\Gamma_{\pi,\mathfrak{a}}$ et $\mathcal{H} \times \mathcal{H}^-/\Gamma_{\pi,\mathfrak{a}}$. Ces surfaces sont homéomorphes si $\varepsilon\varepsilon' = -1$. On démontre le résultat suivant.

THÉORÈME 5. - Si $\varepsilon\varepsilon' = -1$, on a

$$\chi_{\pi,\mathfrak{a}} = T_\pi(D) .$$

Si $\varepsilon\varepsilon' = 1$, on a

$$\chi_{\pi,\mathfrak{a}} + \chi'_{\pi,\mathfrak{a}} = T_{\pi}(D) ,$$

où $T_{\pi}(D)$ est le nombre de types des ordres d'Eichler de niveau π dans le corps de quaternions totalement défini sur $\underset{\sim}{Q}(\sqrt{D})$ non ramifié.

$$T_1(D) = \frac{1}{4}\left(2\zeta_{\underset{\sim}{Q}(\sqrt{D})}(-1) + \sum_r a_r \frac{r-1}{r}\right) \quad \text{si} \quad \pi = (1) ,$$

sinon $T_{\pi}(D)$ est donné par une expression analogue. Remarquons que ce théorème implique que $\chi_{\pi,\mathfrak{a}}$ ou $\chi_{\pi,\mathfrak{a}} + \chi'_{\pi,\mathfrak{a}}$ selon le cas sont indépendants de $\mathfrak{a}$.

On pourrait également considérer l'involution $\tau(z_1 , z_2) = (z_2 , z_1)$ et les surfaces $Y_0(D)/\tau$. Signalons le résultat suivant (lettre de PETERS à EICHLER, 1975) : soit $\hat{\chi}$ le genre arithmétique de $Y_0(D)/\tau$. On suppose p premier, p congru à 5 modulo 8 .

THÉORÈME 6. - Soit $\hat{T}(p)$ le nombre de type des ordres maximaux symétriques du corps de quaternions sur K non ramifié, on a, si p est un nombre premier congru à 1 modulo 8

$$\hat{\chi} = \frac{1}{2}(T(p) - \hat{T}(p) + 1 = \frac{1}{2}\left(\chi - \left[\frac{p-29}{24}\right]\right) .$$

En particulier, comme le nombre de classes des formes quaternaires, paires, qui représentent 1 , est égal à $\hat{T}(p)$; on en déduit que $\hat{\chi} = 1$ si, et seulement si, toute forme quaternaire paire [de discriminant p] représente 1 .

Ceci est vrai pour $p < 193$ et $p = 197 , 229, 269 , 293 , 317$.

2. Formes modulaires de Hilbert.

Par définition, une forme modulaire de Hilbert est une fonction holomorphe

$$f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \underset{\sim}{C}$$

vérifiant

$$f(\gamma Z) = N(cZ + d)^{-k} f(Z)$$

pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ (où Γ est le groupe modulaire de Hilbert classique) où $N(Z) = Z_1 Z_2$ si $Z = (Z_1 , Z_2) \in \underset{\sim}{C}^2$, et où k est un nombre entier appelé le poids de f . Il n'est pas utile d'imposer une condition aux pointes de Γ , La fonction f ainsi définie est régulière aux pointes. Si le terme constant de son développement en série de Fourier est nul, pour chaque pointe, la forme est dite parabolique. On note $M_k(\Gamma)$ l'espace des formes modulaires de Hilbert de poids k pour Γ , et $S_k(\Gamma)$ l'espace des formes paraboliques. On a

$$\dim M_k(\Gamma) = h + \dim S_k(\Gamma) .$$

En chaque pointe, on définit une série d'Eisenstein (non nulle pour cette pointe, mais nulle aux autres). Si $\{\mathfrak{a}_i\}$ est un système de représentants des classes des idéaux de $\underset{\sim}{Q}(\sqrt{D})$, on pose, pour $k \geqslant 3$,

$$G_k(Z_1\ ,\ Z_2\ ,\ \mathfrak{a}_i) = N\mathfrak{a}_i^k \sum_{m,n\in\mathfrak{a},(m,n)\neq(0,0)\ \text{non associés}} (mZ_1 + n)^{-k}\ (m'\ Z_2 + n')^{-k}$$

(On définit ainsi $G_2(Z_1\ ,\ Z_2\ ,\ \mathfrak{a}_i)$ avec le "truc de Hecke").

Si $k = r$ est un nombre entier pair > 2 , la dimension de $S_k(\Gamma)$ est donnée par la formule de Shimizu. On a

$$\dim S_r(\Gamma) = r(r-1)\ 2\zeta_{\underset{\sim}{Q}(\sqrt{D})}(-1) + \mu_r$$

où μ_r ne dépend que de la classe de r modulo le p. p. c. m. des ordres des groupes d'isotropie des points fixes elliptiques. Si r est un multiple des groupes d'isotropie des points fixes elliptiques, on a

$$\mu_r = \chi\ .$$

La dimension de $S_2(\Gamma)$ s'obtient par la relation

$$\chi = 1 + \dim S_2(\Gamma)\ .$$

Remarquons que $\dim S_2(\Gamma) = 0$ est équivalent à $\chi = 1$. Alors le corps des fonctions automorphes pour Γ est une extension transcendante paire de $\underset{\sim}{C}$ de degré de transcendance 2 .

<u>Exemple</u> : <u>Formes modulaires de Hilbert sur</u> $\underset{\sim}{Q}(\sqrt{5})$. – Le nombre de classes de $\underset{\sim}{Q}(\sqrt{5})$ est 1 , l'unité fondamentale $\varepsilon = (+1+\sqrt{5})/2$ vérifie $\varepsilon\varepsilon' = 1$, l'application $(m\ ,\ n) \in \underset{\sim}{Z}^2 \to m\varepsilon + n\varepsilon' \in \mathcal{O}$ est un isomorphisme de $\underset{\sim}{Z}^2$ sur $\mathcal{O}$.

La série d'Einsenstein, unique, de poids $k \geqslant 2$, admet un développement en série de Fourier :

$$E_k(Z_1\ ,\ Z_2) = 1 + C_k \sum_{\nu/\sqrt{5}\gg 0,\nu\in\mathcal{O}} (\Sigma_{(\mu)/\nu}\ N(\mu)^{k-1})\ \exp(2i\pi\ \frac{\nu Z_1 + \nu' Z_2}{\sqrt{5}}$$

avec $C_k = (2\pi)^{2k}\ 5^{\frac{1}{2}-k}\ \Gamma(k)^{-2}\ \zeta^{-1}_{\underset{\sim}{Q}(\sqrt{5})}(k)$.

Par exemple $C_2 = 120$, $C_4 = 240$.

On pose, pour simplifier,

$$\exp(2i\pi\ \frac{\nu Z_1 + \nu' Z_2}{\sqrt{5}} = (m\ ,\ n) \quad \text{si} \quad \nu = m\varepsilon + n\varepsilon'\ .$$

On a

$$\sigma = \frac{\nu - \nu'}{\sqrt{5}} = m - n \quad (\text{la trace de } \frac{\nu}{\sqrt{5}})\ .$$

Remarquons que le coefficient de $(m\ ,\ n)$ est aussi celui de $(-n\ ,\ -m)$ (qui correspond à ν'). On range les termes suivant les valeurs croissantes de la trace σ de $\nu/\sqrt{5}$ (Il y a un nombre fini de ν donnant σ , car on a la condition $\nu/\sqrt{5} \gg 0$)

$\sigma = 1$ correspond à $\exp(2i\pi\ \frac{\varepsilon Z_1 + \varepsilon' Z_2}{\sqrt{5}}) = (1\ ,\ 0)$, et $(0\ ,\ -1)$

$\sigma = 2$ correspond à $\nu = \varepsilon^3$, 2ε , $\sqrt{5}$ (et les conjugués) c'est à dire $(3\ ,\ 1)$, $(2\ ,\ 0)$, $(1\ ,\ -1)$ (et les conjugués)

$\sigma = 3$ correspond à $(4\ ,\ 1)$, $(3\ ,\ 0)$, $(2\ ,\ -1)$ (et les conjugués).

On a

$$E_2(Z_1,Z_2) = 1 + 120[\{(1,0) + (0,-1)\} + \{(3,1) + (-1,-3)\} + 5\{(2,0) + (0,-2)\}$$
$$+ 6(1,-1) + 6\{(4,1) + (-1,-4)\} + 10\{(3,0) + (0,-3)\} + 12\{(2,-1) + (1,-2)\} + \mathcal{O}(4)]$$

où $\mathcal{O}(4)$ est la série des termes tels que $\mathrm{Trace}(\nu/\sqrt{5}) \geq 4$.

On a $E_2(Z\ ,\ Z) = G_4$ la série d'Einsenstein à une variable

$$E_2(Z\ ,\ Z) = 1 + 240\ \Sigma_{n\geq 1}\ \sigma_3(n)\ q^n = 1 + 240(q + 9q^2 + 28q^3 + \dots)\ .$$

On a $E_4(Z_1\ ,\ Z_2) = E_2^2(Z_1\ ,\ Z_2)$, car la dimension des formes paraboliques de poids 4 est nulle.

Une autre façon de construire des formes modulaires de Hilbert est de définir la série thêta associée à une forme quadratique Q entière ppire à $2m$ variables $x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_{2m}$, définie positive, de déterminant une unité totalement positive.

On pose $X = {}^t(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_{2m})$. Alors $Q(X) = \frac{1}{2}\ {}^tX\ AX$, où A est une matrice à coefficients dans $\mathcal{O}$, les coefficients de la diagonale appartenant à $2\mathcal{O}$. La série thêta, associée à Q , est :

$$\theta(Z_1\ ,\ Z_2\ ;\ Q) = \Sigma_{X\in\mathcal{O}^{2m}}\ \exp(2i\pi\ \frac{Q(X)\ \varepsilon Z_1 + Q(X)\,'\varepsilon\,'Z_2}{\sqrt{5}})\ .$$

Il existe Q si, et seulement si, le nombre de variables est divisible par 4 . Il existe une seule classe à 4 variables :

$$Q_4\ :\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1-\varepsilon \\ -1 & 2 & -1 & \varepsilon-1 \\ 0 & -1 & 2 & -\varepsilon \\ 1-\varepsilon & \varepsilon-1 & -\varepsilon & 2 \end{bmatrix}$$

Il existe deux classes à 8 variables $Q_4 \oplus Q_4$ et Q_8 , où Q_8 est à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$

$$Q_8\ :\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & & 2 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & & & 1 & 2 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 2 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

On a

$$\theta(Z_1\ ,\ Z_2\ ;\ Q_4) = E_2(Z_1\ ,\ Z_2)$$
$$\theta(Z_1\ ,\ Z_2\ ;\ Q_4 \oplus Q_4) = \theta(Z_1\ ,\ Z_2\ ,\ Q_8) = E_4(Z_1\ ,\ Z_2)\ .$$

On en déduit les nombres de décomposition des entiers de $\mathcal{O}$ par Q_4 et Q_8.

L'algèbre graduée $\oplus M_k(\Gamma)$ est engendrée par E_2 et trois formes paraboliques X_5, X_6, X_{15} de poids écrit en indice (dans la notation de Resnikoff). Si nous nous limitons aux poids pairs, l'algèbre graduée est engendrée par X_5^2, X_6, $X_5 X_{15}$ dont on connait le développement en série de Fourier (RESNIKOFF, Math. Annalen, t. 208, 1974, p. 161-170).

Si on considère le groupe

$$\Gamma' = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}) \quad \begin{matrix} a \equiv d \equiv 1(2) \\ b \equiv c \equiv 0(2) \end{matrix} \right.$$

ce groupe a 5 pointes $(0, \infty, 1, \varepsilon, \varepsilon')$; on note Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 les séries d'Eisenstein (de poids 2) en ces pointes. Alors l'algèbre des formes modulaires de poids pair pour Γ est

$$\underset{\sim}{C}[Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4]/(\sigma_2, \sigma_4),$$

où σ_i $(1 \leqslant i \leqslant 5)$ sont les fonctions symétriques de $Y_0, \dots, Y_4$. Les formes modulaires pour $SL_2(\mathcal{O})$ sont les formes invariantes par $\mathfrak{A}_5$ le groupe icosaédral (le groupe alterné à 5 éléments d'ordre 60). On en déduit

$$\oplus M_{2k}(\Gamma) = \underset{\sim}{C}[\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5, \Delta]/\Delta^2,$$

où σ_1, σ_3, σ_5 sont algébriquement indépendants, et où $\Delta = \prod_{i<j}(Y_i - Y_j)$ vérifie $\Delta^2 = P(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5)$, où P est un polynôme.

La dimension des formes paraboliques de poids pair est donnée par

$$\dim S_k(SL_2(\mathcal{O})) = \frac{(k-1)^2}{60} + \frac{1}{4} + \begin{cases} \frac{1}{3} & k \not\equiv 1 \mod 3 \\ 0 & k \equiv 1 \mod 3 \end{cases} + \begin{cases} \frac{2}{5} & k \equiv 0,2 \mod 5 \\ -\frac{2}{5} & k \equiv 3,4 \mod 5 \\ 0 & k \equiv 1 \mod 5 \end{cases}$$

k	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
$\dim S_k(SL_2(\mathcal{O}))$	0	0	1	1	2	3	4	5	5	7	...

L'espace des formes invariantes par l'involution $\tau = (Z_1, Z_2) \to (Z_2, Z_1)$ de poids pair est $\underset{\sim}{C}[\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5]$. La forme parabolique Δ de poids 20 est le premier exemple de forme non symétrique.

3. Bibliographie.

Pour l'histoire du développement des formes modulaires de Hilbert avant l'année 1912, où est paru le travail de HECKE : Höhere Modulfunktionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie (Math. Annalen, t. 71, 1912, p. 1-37), je renvoie à l'introduction de HECKE dans cet article. Dans les oeuvres de HECKE (Mathematische Werke. Göttingen, Vandenbroeck & Ruprecht, 1959) se trouvent d'autres articles sur ce sujet :

- Über die Konstruktion relativ-Abelscher Zahlkörper durch Modulfunktionen von zwei Variablen (Math. Annalen, t. 74, 1913, p. 465-510 ; et Math. Werke, p. 69-114),

- Analytische Funktionen und algebraische Zahlen, I und II (Abh. math. Semin. Hamb. Univ., t. 1, 1921, p. 102-126, et t. 3, 1924, p. 213-236 ; et Math. Werke, p. 336-360, et p. 381-404).

Les séries d'Eisenstein à plusieurs variables ont été étudiées par KLOOSTERMANN dans : Theorie der Eisensteinschen Reihen von mehreren Veränderlichen (Abh. math. Hamburg. Univ., t. 6, 1928, p. 163-188).

La théorie des opérateurs de Hecke et la généralisation de la théorie de Hecke-Petersson pour les formes modulaires de Hilbert a été faite par HERRMANN, en 1954, dans : Über Hilbertsche Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung (Math. Annalen, t. 127, 1954, p. 357-400).

La dimension de l'espace des formes paraboliques est obtenue comme une application de la formule des traces de Selberg. La première démonstration complète publiée est de SHIMIZU : On discontinuous groups operating on the product of the upper half planes (Annals of Math., t. 77, 1963, p. 33-71).

Les formes modulaires de Hilbert sur le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ont été étudiées par GÖTZKY : Über eine zahlentheoretische Anwendung von Modulfunktionen zweier Veränderlicher (Math. Annalen, t. 100, 1928, p. 411-437), leurs relations avec les formes quadratiques de déterminant 1 et 4 de 8 variables par MAAS : Modulformen und quadratische Formen über dem quadratischen Zahlkörper $R(\sqrt{5})$ en 1941 (Math. Annalen, t. 118, 1941-43, p. 65-84). La structure de l'algèbre graduée de toutes les formes modulaires sur $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, c'est-à-dire la détermination des générateurs et de toutes les relations entre eux a été faite par RESNIKOFF en 1974 : On the graded ring of Hilbert modular forms associated with $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ (Math. Annalen, t. 208, 1974, p. 161-170) par spécialisation des formes modulaires de Siegel (les coefficients que nous donnons sont calculés dans cet article). Ce travail complète les résultats de HAMMOND : The modular groups of Hilbert and Siegel (Amer. J. of Math., t. 88, 1966, p. 497-516), de GUNDLACH : Die Bestimmung der Funktionen zur Hilbertschen Modulargruppe des Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ (Math. Annalen, t. 152, 1963, p. 226-256), et de BUSAM. La structure de l'algèbre graduée de toutes les formes modulaires de poids pair sur $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ a été aussi obtenue par HIRZEBRUCH comme une application de l'étude de la surface modulaire de Hilbert pour le groupe principal de congruence associé à l'idéal (2) : Hilbert modular surfaces and class numbers ("Colloque Analyse et topologie [1975. Orsay] en l'honneur de Henri Cartan", Astérisque n° 32-33, p. 151-164).

L'étude des surfaces modulaires de Hilbert est principalement faite par HIRZE-

BRUCH dans : Hilbert modular surfaces (L'Enseign. math. 2e série, t. 19, 1973, p. 183-281) [et aussi dans HIRZEBRUCH et ZAGIER : Classification of modular surfaces (Preprint 1974)], où l'on trouve toute la bibliographie propre à ce sujet. J'ai fait la relation entre les genres arithmétiques et les nombres de classes des corps de quaternions totalement définis dans : Invariants métriques des groupes modulaires de Hilbert (Math. Annalen, 1975, à paraître). La relation entre les classes des formes quaternaires de discriminant premier et les types des ordres des corps de quaternions est de KITAOKA : Quaternary even positive definite quadratic forme of prime discriminant (Nagoya math. J., t. 52, 1973, p. 147-161) et PONOMAREV: Class number of definite quaternary forms with non square discriminant (Bull. Amer. math. Soc., t..79, 1973, p. 594-598) et A correspondence between quaternary quadratic forms (1975).

(Texte reçu le 6 décembre 1976)

Marie-France VIGNÉRAS
Mathématiques, Bâtiment 425
Université de Paris-Sud
Campus universitaire
91405 ORSAY