

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

THONG NGUYEN-QUANG-DO

Le plongement caloisien à noyau d'ordre premier et ses applications à la construction d'extensions non abéliennes

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, n° 2 (1975-1976),
exp. n° G5, p. G1-G5

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_2_A11_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE PLONGEMENT GALOISIEN À NOYAU D'ORDRE PREMIER
ET SES APPLICATIONS À LA CONSTRUCTION D'EXTENSIONS NON ABÉLIENNES

par NGUYEN-QUANG-DO Thong

Introduction.

Etant donné un corps arithmétique k (i. e. un corps local ou global), le grand problème est : Pour tout groupe G , classifier les extensions galoisiennes de k dont le groupe de Galois est isomorphe à G . Si G est abélien, le problème est résolu par la théorie du corps de classes. Il n'y a pas encore de théorie satisfaisante dans le cas non abélien. Si G n'est pas abélien, on peut se limiter au cas où G est résoluble, et faire des constructions par induction : c'est le problème inverse de la théorie de Galois. Plus précisément :

Soit K/k galoisienne, de groupe G . Soit l'extension de groupe :

$$(E) \quad 1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{s} G \longrightarrow 1.$$

Construire une extension $L/(K/k)$ telle que L/K soit galoisienne de groupe A , et L/k galoisienne de groupe E , et telle que le passage au quotient s corresponde sur les groupes de Galois à la restriction des automorphismes de L à K . Ce problème est appelé problème du plongement relatif à K/k et la suite exacte (E) ; A est le noyau du plongement.

Nous nous occuperons ici d'un plongement particulier :

Soit k un corps \mathcal{L} -adique, i. e. une extension finie d'un corps $\mathbb{Q}_{\mathcal{L}}$ de nombres \mathcal{L} -adiques. Soit p un nombre premier. Etant donnée une extension galoisienne K/k , de groupe G , trouver toutes les extensions L qui sont cycliques de degré p sur K et galoisiennes sur k .

Nous appellerons $(K/k, p)$ ce problème. Le nombre des solutions est noté $N(K/k, p)$. On a $N(K/k, p) < \infty$ d'après un résultat de KRASNER [3] sur la finitude du nombre des extensions de degré donné d'un corps \mathcal{L} -adique. Nous allons calculer $N(K/k, p)$, et appliquer les résultats à la détermination des extensions galoisiennes de k dont le groupe est non abélien, pas trop compliqué.

1. Résultats géométriques.

Définitions. - Pour toute extension K de $\mathbb{Q}_{\mathcal{L}}$, de degré n , et pour tout nombre premier p , soit Γ_K le groupe K^*/K^{*p} , considéré comme espace vectoriel sur \mathbb{F}_p . Alors $\dim \Gamma_K = \alpha n + 1 + \varepsilon$, avec $\alpha = 1$ (resp. 0) si $p = \mathcal{L}$ (resp. $p \neq \mathcal{L}$) et $\varepsilon = 1$ (resp. 0) si K contient (resp. ne contient pas) le groupe A_p des racines p -ièmes de l'unité (cf. par exemple CASSELS-FRÖHLICH [1]).

THÉOREME 1.1. - Pour toute extension galoisienne K/k , de groupe G , et pour tout nombre premier p , le nombre $N(K/k, p)$ est égal :

- (i) au nombre des hyperplans de Γ_K stables par G ,
- (ii) au nombre des droites de l'espace dual $\hat{\Gamma}_K$ stables par G .

Preuve. - Par le corps de classes [1] ou par la théorie de Galois, on obtient des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une extension L/K , cyclique de degré p , soit galoisienne sur k . La traduction en langage géométrique donne le théorème.

C. Q. F. D.

Si K contient le groupe A_p des racines p -ièmes de l'unité, le symbole de puissance p -ième [1] permet de définir, par passage au quotient, une forme bilinéaire antisymétrique, non dégénérée, notée $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$. Par rapport à cette forme, le groupe $G = \text{Gal}(K/k)$ agit comme un groupe de similitudes. Plus précisément, $\forall \sigma \in G, \forall \alpha \in \Gamma_K, \forall \beta \in \Gamma_K, \langle \sigma\alpha, \sigma\beta \rangle = j\langle \alpha, \beta \rangle$, où $j = j(\sigma)$ est l'élément de \mathbb{F}_p défini par $\sigma(\zeta) = \zeta^j$, ζ générateur de A_p . On peut alors compléter 1.1.

THÉOREME 1.1 bis. - Dans les hypothèses de 1.1, supposons, en plus, que K contient A_p . Alors $N(K/k, p) =$ nombre des droites de Γ_K laissées stables par G .

Preuve. - En effet, toute similitude conservant l'orthogonalité, il y aura bijection entre les hyperplans stables par G et les droites (orthogonales à ces hyperplans) stables par G .

C. Q. F. D.

2. Cas où $\text{Gal}(K/k)$ est un p -groupe.

Définitions. - Pour tout p -groupe G , on notera $I_G = I$ l'idéal d'augmentation de l'algèbre de groupe $\mathbb{F}_p[G]$, i. e. la sous-algèbre engendrée par $(\sigma - 1)$, $\sigma \in G$.

PROPOSITION 2.1. - Si $G = \text{Gal}(K/k)$ est un p -groupe, $N(K/k, p)$ est égal au nombre de sous-groupes d'ordre p du groupe d'homologie $H_0(G, \Gamma_K) = \Gamma_K/I\Gamma_K$.

Preuve. - Si G est un p -groupe, les valeurs propres de tout $\sigma \in G$ sont égales à 1. Donc $N(K/k, p) =$ nombre des vecteurs de $\hat{\Gamma}_K$ fixes par G , d'où le résultat, par dualité.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 2.1 bis. - Si, en plus, K contient A_p , $N(K/k, p)$ est égal au nombre des sous-groupes d'ordre p du groupe de cohomologie $H^0(G, \Gamma_K^G) = \Gamma_K^G$.

On peut toujours, par extension du corps k (et moyennant quelques précautions!), supposer que k contient A_p . Alors, si $\dim \Gamma_K^G = c$, on aura :

$$N(K/k, p) = (p^c - 1)/(p - 1)$$

d'après 2.1 bis. Il reste à calculer c .

THÉOREME 2.2. - Soit k un corps \mathcal{E} -adique contenant A_p . Soit K/k galoisienne de groupe G ($G =$ un p -groupe). Alors $\dim \Gamma_K^G = \alpha n + 2 - \beta + r - d$, où :

$$n = [k : \mathbb{Q}_\mathcal{E}],$$

$$\alpha = 1 \text{ (resp. } 0) \text{ si } p \text{ divise } \mathcal{E} \text{ (resp. ne divise pas),}$$

$$d = \text{nombre minimal de générateurs de } G = \dim H^1(G, A_p),$$

$$r = \text{nombre minimal de relations de } G = \dim H^2(G, A_p),$$

$$\beta = 0 \text{ (resp. } 1) \text{ si l'image de } H^2(G, A_p) \text{ dans } H^2(G, K^*) \text{ est } 0 \text{ (resp. } \neq 0).$$

Preuve. - Des deux suites exactes

$$1 \longrightarrow K^{*p} \longrightarrow K^* \longrightarrow \Gamma_K \longrightarrow 1 \text{ et } 1 \longrightarrow A_p \longrightarrow K^* \longrightarrow K^{*p} \longrightarrow 1,$$

on tire les suites exactes de cohomologie :

$$1 \longrightarrow (K^{*p})^G = K^{*p} \cap k^* \longrightarrow K^{*G} = k^* \longrightarrow \Gamma_K^G \longrightarrow H^1(G, K^{*p}) \longrightarrow H^1(G, K^*) = 1$$

et

$$H^1(G, K^*) = 1 \longrightarrow H^1(G, K^{*p}) \xrightarrow{\psi} H^2(G, A_p) \xrightarrow{\varphi} H^2(G, K^*) \longrightarrow \dots$$

La première donne $\Gamma_K^G / \text{Im } \eta \simeq H^1(G, K^{*p})$, où η est l'homomorphisme canonique de Γ_k dans Γ_K , et par KUMMER, on sait que $\text{Ker } \eta \simeq H^1(G, A_p)$.

La seconde suite montre que $H^1(G, K^{*p})$ s'injecte dans $H^2(G, A_p)$ par ψ , avec $\text{Coker } \psi \simeq \text{Im } \varphi$. Or, d'après le corps de classes [1], $H^2(G, K^*)$ est cyclique, et comme $H^2(G, A_p)$ est d'exposant p , $\text{Im } \varphi$ est au plus d'ordre p .

C. Q. F. D.

3. Cas où $\text{Gal}(K/k)$ est d'ordre premier à p .

On suppose que k est une extension finie de \mathbb{Q}_p , contenant A_p . Si K/k est galoisienne de groupe G , d'ordre premier à p , l'algèbre $\mathbb{F}_p[G]$ est semi-simple et l'extension K/k est modérément ramifiée.

Définitions. - Soit v_K la valuation de K . Pour tout entier $m \geq 0$, on pose :

$$U_K^0 = U_K = \text{groupe des unités de } K,$$

$$U_K^m = \{x \in K^*; v(1 - x) \geq m\} \text{ pour } m \geq 1,$$

$e_K = v(p)$ et $e_K^1 = v(p)/(p-1)$ ($= v(\zeta - 1)$, ζ générateur de A_p).

THÉOREME 3.1. - Dans ces conditions,

$$N(K/k, p) = \frac{p^{n+2} - 1}{p - 1} + t \frac{p^n - 1}{p - 1},$$

où $n = [k : \mathbb{Q}_p]$ et $t = |\text{Hom}(G, \mathbb{F}_p^*) - 1|$.

Preuve. - Le problème revient à compter la multiplicité avec laquelle une représentation de dimension 1 intervient dans l'espace de représentation Γ_K de G sur \mathbb{F}_p . En posant $\Gamma_K^m = U_K^m K^{*p}/K^{*p}$ pour $m \geq 0$, on voit facilement que :

- l'espace de représentation Γ_K est somme directe de Γ_K^1 et d'un espace de dim 1 sur lequel G opère trivialement,

- G opère trivialement sur $\Gamma_K^{pe_K^1}$.

Reste à étudier l'action de G sur $\Gamma_K^1/\Gamma_K^{pe_K^1}$. Pour cela, on le filtre par les $\Gamma_K^m/\Gamma_K^{pe_K^1}$, et on utilise un résultat d'IWASAWA [2].

C. Q. F. D.

4. Extensions galoisiennes non abéliennes de certains types donnés.

Dans tout ce paragraphe, $[k : \mathbb{Q}_p] = n$, k contient A_p . On va appliquer les résultats précédents à la détermination des extensions galoisiennes de k dont le groupe est isomorphe à un groupe non abélien donné, pas trop compliqué.

PROPOSITION 4.1. - Soit q premier, $\neq p$. Le nombre des extensions diédrales de k , de degré pq , est égal à $(q^2 - 1)(p^n - 1)/(p - 1)$ si q divise $p - 1$, 0 sinon.

Preuve. - On remarque que si L/k est une extension galoisienne de degré pq , $\text{Gal}(L/k)$ admet un sous-groupe normal d'ordre p , et un seul, d'après la théorie de la ramification. Le reste s'ensuit aisément.

C. Q. F. D.

(4.2) : On veut déterminer les extensions non abéliennes de degré p^3 de k ($p \neq 2$, ou $p = 2$). Les résultats sont trop compliqués pour être énoncés ici (voir [4]). La méthode consiste, étant donnée K/k galoisienne, de groupe G , de type (p, p) , à déterminer Γ_K^G en "descendant" dans les sous-extensions de K . Le langage géométrique est essentiel pour la clarté des calculs.

(4.3) : Pour finir, donnons une application cohomologique :

PROPOSITION. - Soit G un p -groupe abélien dont le nombre minimal de générateurs (resp. de relations) est d (resp. r). Alors $r = d(d + 1)/2$.

La preuve consiste à fabriquer une extension galoisienne K/k , de groupe G ,

telle que $H^2(G, A_p)$ s'identifie à $H^1(G, K^{*p})$. On utilise alors la suite exacte d'inflation-restriction (il faut une étude assez fine) pour déterminer le H^1 par "dévissage" de G . Il serait plaisant, par une méthode analogue, de redémontrer la célèbre (voir [1]) inégalité de Golod-Šafarevič, $r \geq d^2/4$.

Je n'y suis pas arrivé.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CASSELS (J. W. S.) and FRÖHLICH (A.) [Editors]. - Algebraic number theory, Proceedings of an instructional conference [1965. Brighton]. - London, Academic Press, 1967.
- [2] IWASAWA (K.). - On Galois groups of local fields, Trans. Amer. math. Soc., t. 80, 1955, p. 448-469.
- [3] KRASNER (M.). - Nombre des extensions d'un degré donné d'un corps p -adique, "Colloques internationaux du C. N. R. S., 143 : Les tendances géométriques en algèbre et théorème des nombres [1964. Clermont-Ferrand], p. 143-169. - Paris, Centre National de la Recherche Scientifique, 1966.
- [4] MASSY (R.) et NGUYEN-QUANG-DO Thong. - Extensions galoisiennes non abéliennes de degré p^3 d'un corps \mathcal{O} -adique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 280, 1975, Série A, p. 1345-1347.

(Texte reçu le 10 novembre 1975)

NGUYEN-QUANG-DO Thong
21 rue des Sablons
91350 GRIGNY
