Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Khyra Gérardin

Quotient d'Hadamard de séries rationnelles à plusieurs variables non commutatives

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, nº 1 (1975-1976), exp. nº 5, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_1_A5_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° 5, 11 p.

3 novembre 1975

QUOTIENT D'HADAMARD DE SÉRIES RATIONNELLES À PLUSIEURS VARIABLES NON COMMUTATIVES

par Khyra GÉRARDIN

Le but de cet exposé est d'étendre un résultat de Martine PATHIAUX, concernant le quotient d'Hadamard de 2 séries rationnelles à une variable, au quotient d'Hadamard de séries rationnelles à plusieurs variables non commutatives.

Rappelons les notations : Soient X un ensemble fini appelé alphabet, et X^* le monoïde libre qu'il engendre. Pour tout $f \in X^*$, $|f|$ désigne la longueur du mot f, c'est-à-dire le nombre d'éléments de X qui interviennent dans l'écriture de f, si $f \in XX^*$. Si $f = \varepsilon$ le mot vide de X^*, on dit que $|f| = 0$. Lorsque $|X| = 1$, alors $X^* = \underset{\sim}{N}$.

Dans ce cas, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 1 [3]. - <u>Soit</u> $a = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ <u>une série rationnelle à coefficients entiers algébriques. Soient</u> P_1, P_2 <u>deux polynômes à coefficients entiers algébriques. Soient</u> μ_1, μ_2 <u>deux entiers algébriques. Si</u>

$$b_n = \frac{a_n}{P_1(n)\mu_1^n - P_2(n)\mu_2^n}$$

<u>est un entier algébrique pour tout</u> $n \geq 0$, <u>alors la série</u> $\sum_n b_n X^n$ <u>est rationnelle.</u>

Si $|X| \geq 2$, soit $a = \sum_{f\in X^*}(a, f)f$ une série rationnelle sur X, pour tout $f \in X^*$, (a, f) est le coefficient de f dans le développement de la série a.

On suppose que (a, f) est un entier algébrique pour tout $f \in X^*$. Soient P_1 et P_2 deux polynômes à coefficients entiers algébriques. Soient μ_1 et μ_2 deux entiers algébriques. Si

$$(b, f) = \frac{(a, f)}{P_1(|f|)\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\mu_2^{|f|}}$$

est un entier algébrique pour tout $f \in X^*$, on a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 1'. - <u>La série</u> $b = \sum_{f\in X^*}(b, f)f$ <u>est rationnelle.</u>

<u>Démonstration</u>. - Soit $K = \underset{\sim}{Q}(\zeta)$ une extension algébrique de degré s, contenant les coefficients de a, les coefficients des polynômes P_1, P_2, ainsi que μ_1, μ_2. Si $x \in K$, $x = x^{(1)}, x^{(2)} \dots x^{(s)}$ sont les conjugués de x sur $\underset{\sim}{Q}$.

Ceci permet de déterminer les cas suivants :

<u>1er cas</u> : $|\mu_1| \neq |\mu_2|$

2e cas : μ_2/μ_1 est une racine de l'unité.

3e cas : $|\mu_2^{(\nu)}| = |\mu_1^{(\nu)}|$, $\forall\ \nu \in (1, 2, \ldots, s)$, et μ_2/μ_1 n'est pas une unité.

Premier cas : $|\mu_1| \neq |\mu_2|$.

(A) Les polynômes P_1 et P_2 sont de degré nul, c'est-à-dire $P_1 = c_1$, $P_2 = c_2$, et $|\mu_1| > |\mu_2|$. Soit

$$(b , f) = \frac{(a , f)}{c_1 \mu_1^{|f|} - c_2 \mu_2^{|f|}} ,$$

$$(b , f) = \frac{(a , f)}{c_1 \mu_1^{|f|}[1 - (c_2/c_1)(\mu_2/\mu_1)^{|f|}]} = \frac{(a , f)}{c_1 \mu_1^{|f|}} \sum_{r \geq 0} (\frac{c_2}{c_1})^r (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{r|f|} .$$

Or, pour tout $r \geq 1$, on a :

$$(b , f) = \frac{(a , f)}{c_1 \mu_1^{|f|}} [1 + (\frac{c_2}{c_1})(\frac{\mu_2}{\mu_1})^{|f|} + \ldots + (\frac{c_2}{c_1})^{r-1} (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{(r-1)|f|}]$$
$$+ \frac{(a , f)}{c_1 \mu_1^{|f|}} \times (\frac{c_2}{c_1})^r \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{r|f|} \times 1/(1 - \frac{c_2}{c_1} (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{|f|}) .$$

Pour tout $r \geq 1$, la série de terme général

$$\frac{(a , f)}{c_1 \mu_1^{|f|}} \times [1 + (\frac{c_2}{c_1})^{|f|} + \ldots + (\frac{c_2}{c_1})^{r-1} \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{(r-1)|f|}]$$

est rationnelle. En effet, c'est une combinaison linéaire de produits de Hadamard de séries rationnelles [4].

Examinons la série de terme général :

$$\frac{(a , f)}{c_1 \mu_1^{|f|}} \times (\frac{c_2}{c_1})^r \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{r|f|} \times 1/(1 - \frac{c_2}{c_1} (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{|f|})$$
$$= \frac{(a , f)}{c_1 \mu_1^{|f|} - c_2 \mu_2^{|f|}} \times (\frac{c_2}{c_1})^r \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{r|f|} .$$

Soit

$$c = \sum_{f \in X^*} \frac{(a , f)}{c_1 \mu_1^{|f|} - c_2 \mu_2^{|f|}} \times (\frac{c_2}{c_1})^r \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{r|f|} f .$$

On désignera par D_f le déterminant de Hankel associé à la série c et au mot de la manière suivante : Sur X^* , on adopte l'ordre suivant $g \leq f$ si $|g| < |f|$, ou si $|g| = |f|$, alors g précède g lexicographiquement.

Etant donné un mot de X^* , on notera D_f le déterminant de Hankel associé à la série c et au mot f le déterminant, dont les lignes et les colonnes sont indexées par les mots g , $g \in X^*$ et $g \leq f$. L'élément (g , h) de ce déterminant est le coefficient du mot gh dans la série c . Or ce coefficient n'est autre que

$$\frac{(a\ ,\ gh)}{c_1\ \mu_1^{|g|+|h|} - c_2\ \mu_2^{|g|+|h|}} \times (\frac{c_2}{c_1})^r \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{r(|g|+|g|)} .$$

On peut écrire simplement le terme proportionnel à cet élément, que nous noterons $(D_f)_{(g,h)}$.

Soit D'_f le déterminant dont les éléments $(D'_f)_{(g,h)}$ sont :

$$(D'_f)_{(g,h)} = \frac{(a\ ,\ gh)}{c_1\ \mu_1^{|g|+|h|} - c_2\ \mu_2^{|g|+|h|}} \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{r[|g|+|h|]} .$$

L'idée de la démonstration est de montrer que $D'_f \longrightarrow 0$, lorsque $|f| \longrightarrow \infty$.

D'_f étant un entier algébrique, on en déduit que $D'_f = 0$ à partir d'un certain mot f . Donc la série c est rationnelle [1]. D'où la série b est rationnelle comme somme de séries rationnelles.

Soit $p = |f|$. Supposons $X = (x\ ,\ y)$; d'où $|X^n| = 2^n$, $\forall\ n \geq 0$. Soit q le nombre de mots g tels que

$$g \leqslant f \quad \text{et} \quad |g| = |f| = p .$$

Dans le déterminant D'_f , on peut mettre en facteur, dans chaque ligne d'indice g , le coefficient $(\mu_2/\mu_1)^{r|g|}$, et, dans chaque colonne d'indice g , le coefficient $(\mu_2/\mu_1)^{r|g|}$. On a donc

$$D'_f = ((\frac{\mu_2}{\mu_1})^{r[2+n2^n+\ldots+(p-1)2^{p-1}]} \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{r\times p\times q})^2 \times D''_f ,$$

où D''_f est le déterminant de Hankel associé à la série de terme général $(a\ ,\ gh)/(c_1\ \mu_1^{|g|+|h|} - c_2\ \mu_2^{|g|+|h|})$, or $(a\ ,\ gh)/(c_1\ \mu_1^{|g|+|h|} - c_2\ \mu_2^{|g|+|h|})$ est un entier algébrique pour tout couple $(g\ ,\ h)$.

On va démontrer que $D'_f \longrightarrow 0$ lorsque $p \longrightarrow \infty$. Or

$$D'_f = (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{r[2^{2p}(p-2)^2+4+(p-2)\times 2^{p+1}+2pq]} \times D''_f .$$

Evaluons D''_f : Posons, pour tout $g \in X^*$,

$$(b\ ,\ g) = (d\ ,\ g) + (c\ ,\ g) ,$$

où $(b\ ,\ g)$ est le coefficient de g dans la série b , et, par définition,

$$(d\ ,\ g) = \frac{(a\ ,\ g)}{c_1\ \mu_1^{|g|}} \times [1 + (\frac{c_2}{c_1})(\frac{\mu_2}{\mu_1})^{|g|} +\ldots+ (\frac{c_2}{c_1})^{r-1} \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{(r-1)|g|}] .$$

Or $(D''_f)_{(g,h)} = (d\ ,\ gh) + (c\ ,\ gh)$. D''_f est donc la somme de D'_f et de D'''_f (où D'''_f est le déterminant de Hankel associé à la série $\sum_{g\in X^*}(d\ ,\ g)g$) et d'une somme de déterminants dont une colonne au moins est une colonne de D''_f , et une colonne au moins est une colonne de D'''_f .

La fonction déterminant étant continue, on écrit qu'elle est continue au voisinage du point dont les coordonnées sont les colonnes de D'''_f .

La série $\sum_{g\in X^*}(d\ ,\ g)g$ étant rationnelle, on a :

$$D_f''' = 0 \quad \text{pour} \quad |f| \quad \text{assez grand.}$$

Or on a vu que $D_f' \longrightarrow 0$ très vite lorsque $|f| \longrightarrow \infty$.

Les déterminants, dont une colonne au moins est une colonne de D_f'' et une au moins une colonne de D_f''', ont une somme qui tend très vite vers 0 lorsque $|f| \longrightarrow \infty$. D'où

$$D_f'' \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad |f| \longrightarrow \infty .$$

Or la série $b = \sum_{f \in X^*} (b\ ,\ f)f$ est à coefficients entiers algébriques. D'où

$$D_f'' = 0 \quad \text{pour} \quad |f| \quad \text{assez grand.}$$

Donc la série $b = \sum_{f\in X^*}(b\ ,\ f)f$ est rationnelle. Ce qui démontre le théorème 1' dans le cas où le degré des polynômes P_1 et P_2 est 0.

(B) <u>Les polynômes</u> P_1 <u>et</u> P_2 <u>sont de degré non nul, et</u> $|\mu_1| > |\mu_2|$: Soit

$$(b\ ,\ f) = \frac{(a\ ,\ f)}{P_1(|f|)\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\mu_2^{|f|}} .$$

On démontre que la série de terme général $(b\ ,\ f) \times P_1(|f|) \times \mu_1^{|f|}$ est rationnelle.

On suppose qu'on peut lui associer une représentation inversible. Le théorème de Cantor permet de conclure [2]. Soit

$$(b',f) = (b,f) \times (P_1(|f|)\mu_1^{|f|}) = (a,f)/[1 - (P_2(|f|)/P_1(|f|)) \times (\mu_2/\mu_1)^{|f|}] .$$

Sauf au plus pour un nombre fini de termes $f \in X^*$, on a :

$$|(P_2(|f|)/P_1(|f|)) \times (\mu_2/\mu_1)^{|f|}| > 1 .$$

D'où, en éliminant ces termes $f_0, \dots, f_n$ tels que $|f_i| \leqslant n$, on peut écrire

$$\begin{aligned}(b',f) &= (a,f)/[1 - \frac{P_2(|f|)}{P_1(|f|)} \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{|f|}] \\ &= (a,f) \times [1 + \frac{P_2(|f|)}{P_1(|f|)} \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{|f|} \times 1/(1 - \frac{P_2(|f|)}{P_1(|f|)} \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{|f|})] \\ &= (a,f) + \frac{P_2(|f|)}{P_1(|f|)} \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{|f|} \times (a,f)/[1 - \frac{P_2(|f|)}{P_1(|f|)} \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{|f|}] .\end{aligned}$$

De la même manière que précédemment on démontre que le déterminant de Hankel de la série de terme général

$$\frac{P_2(|f|)}{P_1(|f|)} \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{|f|} \times (a\ ,\ f)/[1 - \frac{P_2(|f|)}{P_1(|f|)} \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{|f|}]$$

tend vers 0 très vite lorsque $|f| \longrightarrow \infty$.

Soit D_f le déterminant de Hankel dont les lignes et les colonnes sont indexées par les mots $(g\ ,\ h)$, où $g \leqslant f$ et $h \leqslant f$.

Soit q le nombre de termes f_i tels que $f_i \leqslant f$ et $|f_i| = |f| = p$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que

$$\left|\frac{P_2(|f|)}{P_1(|f|)} \times \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{|f|}\right| < 1 \ , \quad \forall\ f \in X^* \ .$$

D'où

$$D_f = \left(\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) \times \dots \times \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{|f|}\right)^2 \times D'_f = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{(2^{2p}(p-2)^2+4+(p-2)\times 2^{p+1}+2pq)} \times D'_f \ ,$$

où D'_f est le déterminant de Hankel jusqu'à "l'ordre f " de la série de terme général

$$(a\ ,\ g)/\left[1 - \frac{P_2(|g|)}{P_1(|g|)}\right] \times \frac{P_2(|g|)}{P_1(|g|)} \ .$$

D'où $D_f \longrightarrow 0$ très vite lorsque $|f| \longrightarrow \infty$.

De la même manière que précédemment on montre que le déterminant de Hankel D''_f jusqu'à "l'ordre f " de la série de terme général

$$(a\ ,\ g) + \frac{P_2(|g|)}{P_1(|g|)} \times \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{|g|} \times (a\ ,\ g)/\left[1 - \frac{P_2(|g|)}{P_1(|g|)} \times \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{|g|}\right]$$

tend vers 0 très vite lorsque $|f|$ croît.

Comme D''_f est un entier algébrique, on a donc

$$D''_f = 0 \quad \text{pour} \quad |f| \quad \text{assez grand.}$$

Donc la série de terme général $(b'\ ,\ g)$ est rationnelle. On suppose qu'on peut associer une représentation inversible à la série de terme général $(b,g)P_1(|g|)$. Donc la série de terme général $(b\ ,\ g)$ est rationnelle.

Deuxième cas : μ_1/μ_2 est une racine de l'unité.

On énonce un certain nombre de lemmes faciles à démontrer :

Soit m un entier, $m \geq 1$, alors pour tout $i \in [0\ ,\ 1\ ,\ \dots\ ,\ m-1]$ on a le lemme suivant :

LEMME 1. - La série $\sum_{|f|\equiv i \pmod m} f$ est rationnelle.

LEMME 2. - Soit $a = \sum_{f\in X^*}(a\ ,\ f)f$ une série rationnelle, alors pour tout $i \in [0\ ,\ 1\ ,\ \dots\ ,\ m-1]$, la série $a_i = \sum_{|f|\equiv i \pmod m} f$ est rationnelle.

Démontrons le théorème 1' dans le cas où μ_2/μ_1 est une racine de l'unité. Soit

$$\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^m = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^i \neq 1 \ , \quad \forall\ 0 \leq i \leq m-1 \ .$$

On démontre que pour tout i , $0 \leq i \leq m-1$, la série

$$\sum_{|f|\equiv i \pmod m}(b\ ,\ f)f = \sum_{\substack{f\in X^* \\ |f|\equiv i \pmod m}} \frac{(a\ ,\ f)f}{P_1(|f|)\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\mu_2^{|f|}}$$

est rationnelle : on en déduit que la série $\sum_{f \in X^*} (b , f)f$ est rationnelle comme somme de m séries rationnelles.

Soit i, $0 \leqslant i \leqslant m-1$, et soit f un mot tel que $|f| \equiv i \pmod m$.

$$P_1(|f|)\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\mu_2^{|f|} = \mu_1^{|f|} \times [P_1(|f|) - P_2(|f|) \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^i]$$
$$= R_i(|f|) ,$$

où $R_i(|f|)$ est un polynôme, d'où, si $|f| \equiv i \pmod m$, on a

$$(b , f) \times R_i(|f|) = (a_i , f) .$$

La série $\sum_{|f| \equiv i \pmod m} (a , f)f$ est rationnelle. On suppose qu'on peut lui associer une représentation inversible, d'où la série $\sum_{|f| \equiv i \pmod m} (b , f)f$ est rationnelle.

Or $\sum_{f \in X^*} (b , f)f = \sum_{0 \leqslant i \leqslant m-1} \sum_{|f| \equiv i \pmod m} (b , f)f$ est rationnelle comme somme de m séries rationnelles, ce qui démontre le théorème 1' dans le cas où $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ est une racine de l'unité.

Troisième cas : $|\mu_2^{(\nu)}| = |\mu_1^{(\nu)}|$, $\forall \nu \in [1 , \ldots , s]$ (s étant le degré de l'extension $\mathbb{Q}(\zeta)$).

Etant donnée une série : $c = \sum_{f \in X^*} (c , f)f$, on notera :

$$c^{(\nu)} = \sum_{f \in X^*} (c , f)^{(\nu)} f .$$

Démontrons un lemme préparatoire.

LEMME 3. - La série $c = \sum_{f \in X^*} (c , f)f$ est rationnelle si, et seulement si, la série

$$c^{(\nu)} = \sum_{f \in X^*} (c , f)^{(\nu)} f$$

est rationnelle.

Démonstration. - L'application $A \longrightarrow A'$, où A est l'anneau des entiers algébriques et A' l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\zeta)$, définie par $x \longmapsto x^{(\nu)}$, est un homomorphisme d'anneaux qu'on peut prolonger facilement à l'anneau des matrices $M_N(A)$ sur $M_N(A')$, $\forall N \geqslant 1$.

En effet, pour toute matrice M de $M_N(A)$, $M^{(\nu)}$ est la matrice dont les coefficients (i , j) s'écrivent $(M_{i,j}^{(\nu)})$, $(M_{i,j})$ étant le coefficient (i , j) de la matrice M .

Ceci permet d'éliminer les cas suivants :

$$|\mu_2^{(\nu)}| \neq |\mu_1^{(\nu)}| \quad \text{pour un certain } \nu \in [1 , 2 , \ldots , s]$$
$$|\mu_2^{(\nu)}| = |\mu_1^{(\nu)}| , \quad \forall \nu \in [1 , 2 , \ldots , s] ,$$

et μ_2/μ_1 est une unité. Dans ce cas où μ_2/μ_1 est une racine de l'unité, on est ramené au deuxième cas. Démontrons donc le théorème 1' dans le cas où

$$|\mu^{(\nu)}| = |\mu^{(\nu)}| \ , \ \forall \ \nu \in [1,2,\ldots,s] \ \text{ et } \ \mu_2/\mu_1 \ \text{ n'est pas une unité.}$$

L'idée de la démonstration est la suivante : les déterminants de Hankel, associés à la série

$$b = \sum_{f\in X^*} \frac{(a\ ,\ f)f}{P_1(|f|)\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\mu_2^{|f|}} \ ,$$

tendent vers 0 lorsque $|f| \longrightarrow \infty$. Ces déterminants sont des entiers algébriques. Ils sont donc nuls à partir d'une certaine longueur $|f|$. Donc la série b est rationnelle.

Sous ces hypothèses il existe un nombre premier p_1, et $\nu \in [1\ ,\ 2\ ,\ldots,\ s]$, tels que :

$$|\mu_1^{(\nu)}| \neq |\mu_2^{(\nu)}|_{p_1} \qquad [3].$$

Soit $|\mu_2^{(\nu)}/\mu_1^{(\nu)}|_{p_1} = \alpha < 1$. On montre que, pour un certain r, la série de terme général

$$\frac{(a\ ,\ f)^{(\nu)}}{(P_1(|f|)\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\mu_2^{|f|})^{(\nu)}} \times [P_1(|f|)^{(\nu)}]^r$$

est rationnelle. Grâce au théorème de Cantor en variables non commutatives, la série

$$\sum_{f\in X^*} \frac{(a\ ,\ f)^{(\nu)}\ f}{(P_1(|f|)\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\mu_2^{|f|})^{(\nu)}}$$

est rationnelle, et on procède comme dans le deuxième cas.

Pour tout $r \geqslant 1$, on a :

$$\frac{((a\ ,\ f)P_1(|f|)^r)^{(\nu)}}{(P_1(|f|)\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\mu_2^{|f|})^{(\nu)}}$$

$$= (a,f)^{(\nu)} \times \sum_{i=0}^{r-1} [P_2(|f|)\ P_1(|f|)^{r-1-i} \times \mu_2^{|f|} \times \mu_1^{-|f|(i+1)}]^{(\nu)}$$

$$+ (a,f)^{(\nu)} \times ((\frac{\mu_2}{\mu_1})^{r|f|})^{(\nu)} \times \frac{(P_2(|f|))^{(\nu)}}{(P_1(|f|)\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\mu_2^{|f|})^{(\nu)}} \ .$$

Or la série de terme général

$$(a\ ,\ f)^{(\nu)} \times \sum_{i=0}^{r-1} (P_2(|f|) \times P_1(|f|)^{r-1-i} \times \mu_2^{|f|i} \times \mu_1^{-|f|(i+1)})^{(\nu)}$$

est rationnelle comme combinaison linéaire de produits d'Hadamard de séries rationnelles. Examinons la série de terme général

$$(d,f)^{(\nu)} = (a,f)^{(\nu)} \times ((\frac{\mu_2}{\mu_1})^{r(|f|)})^{(\nu)} \times (\frac{P_2(|f|)}{P_1(|f|)\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\mu_2^{|f|}})^{(\nu)} \ .$$

Majorons le coefficient $(d\ ,\ f)^{(\nu)}$. Cela permettra la majoration du déterminant de Hankel associé à la série de terme général $(d\ ,\ f)^{(\nu)}$.

Grâce à la formule du produit pour les valuations, on en déduit que les déterminants de Hankel de la série de terme général $(d\ ,\ f)^{(\nu)}$ sont nuls à partir d'un certain rang. D n la série de terme général $(d\ ,\ f)^{(\nu)}$ est rationnelle. D'où la série de terme général :

$$((\frac{\mu_2}{\mu_1})^{r|f|})^{(\nu)} \times \frac{((a\ ,\ f) \times P_2(|f|)^r)^{(\nu)}}{(P_1(|f|)\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\mu_2^{|f|})^{(\nu)}}$$

est rationnelle.

Or $(a\ ,\ f)^{(\nu)}$ étant un entier algébrique, $(P_2(|f|))^{(\nu)}$ étant un entier algébrique, on a donc

$$|(a\ ,\ f)^{(\nu)} \times P_2(|f|)^{(\nu)}|_p \leqslant 1$$

pour toute valuation p-adique, où p est un nombre premier.

Démontrons un lemme qui permet la majoration d'un déterminant connaissant la majoration des coefficients de ce déterminant.

Soit $D = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant n}$ où $a_{ij} \in \mathbb{C}$.

LEMME 4. - On a $|D| \leqslant \prod_{1\leqslant i\leqslant n} [|a_{i,1}| + \ldots + |a_{i,j}| + \ldots + |a_{i,n}|]$.

Démonstration. - Elle se fait par récurrence sur n : Si $n = 1$, alors $|D| = |a_{11}|$, la formule est immédiate. Supposons la formule vraie pour $n - 1$. D'où, en développant le déterminant D par rapport à la 1re ligne, et en notant $A_{j,1}$ le mineur associé au coefficient $a_{1,j}$, on a :

$$D = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_{1,j} \times A_{j,1} .$$

Or $A_{j,1}$ est un déterminant d'ordre $n - 1$. On a

$$|A_{j,1}| \leqslant \prod_{i\geqslant 2} [|a_{i,1}| +\ldots+ |a_{i,j-1}| + |a_{i,j+1}| +\ldots+ |a_{i,n}|]$$
$$\leqslant \prod_{i\geqslant 2} [|a_{i,1}| +\ldots+ |a_{i,j-1}| + |a_{i,j}| + |a_{i,j+1}| +\ldots+ |a_{i,n}|] ,$$

pour tout j , or $D = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_{1,j} \times A_{j,1}$.

$$|D| \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant n} |a_{1,j}| \times |A_{j,1}| \leqslant (\prod_{i\geqslant 2} |a_{i,1}| +\ldots+ |a_{i,n}|)\sum_{1\leqslant j\leqslant n} |a_{1,j}|$$
$$|D| \leqslant \prod_{1\leqslant i\leqslant n} (|a_{i,1}| + \ldots + |a_{i,n}|) .$$

Cas particulier du lemme 4. - Si K est un corps muni d'une valuation ultramétrique, notée $|\ |_p$, on a la majoration suivante :

$$|D|_p \leqslant \prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max|a_{i,j}|_p .$$

La démonstration se fait par récurrence sur n : Si $n = 1$, alors $|D|_p = |a_{11}|_p$ La formule est immédiate, or $D = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_{1,j} \times A_{j,1}$. $A_{j,1}$ étant un déterminant d'ordre $n-1$, on a donc

$$|A_{j,1}|_p \leqslant \prod_{\substack{k\neq j\\ 1\leqslant k\leqslant n\\ i\geqslant 2}} \max|a_{i,k}|_p .$$

Or $\max_{1\leqslant k\leqslant n, k\neq j, i\geqslant 2}|a_{i,k}|_p \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n, i\geqslant 2}|a_{i,k}|_p$. D'où

$$\begin{aligned}|D|_p &\leqslant \max|A_{1,j}|_p\ |a_{1,j}|_p\\ &\leqslant \max|a_{1,j}|_p \times \prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ i\geqslant 2}} \max|a_{i,k}|_p\end{aligned}$$

$$|D|_p \leqslant \prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant i\leqslant n}} \max|a_{i,k}|_p .$$

Etudions la série de terme général

$$(c\ ,\ f)^{(\nu)} = \frac{(a\ ,\ f)^{(\nu)} \times P_2(|f|)^r)^{(\nu)}}{(P_1(|f|)\times\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\times\mu_2^{|f|})^{(\nu)}} \times ((\frac{\mu_2}{\mu_1})^{r|f|})^{(\nu)} .$$

On notera $D_f^{(\nu)}$ le déterminant dont les lignes et les colonnes sont indexées par les mots $(g\ ,\ h)$, où :

$$\varepsilon \leqslant g \leqslant f$$

$$\varepsilon \leqslant h \leqslant f$$

ε étant le mot vide de X^* , et le coefficient $(g\ ,\ h)$ de ce déterminant $D_f^{(\nu)}$ étant $D_{g,h}^{(\nu)} = (c\ ,\ gh)^{(\nu)}$.

Supposons $X = (x\ ,\ y)$, $|f| = q+1$. Soit t le nombre de mots $g \in X^*$ tels que

$$g \leqslant f \quad \text{et} \quad |g| = |f| .$$

$(P_1(|f|))^{(\nu)}$, $(P_2(|f|))^{(\nu)}$ sont des entiers algébriques. Il est immédiat qu'à partir d'une certaine longueur $|f|$ on a la relation

$$|(P_1(|f|)\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\mu_2^{|f|})^{(\nu)}|_{p_1} = |(P_1(|f|)\times\mu_1^{|f|})^{(\nu)}|_{p_1}$$

d'où

$$|(c\ ,\ f)^{(\nu)}|_{p_1} \leqslant \frac{\alpha^{r|f|}}{|(P_1(|f|)\times\mu_1^{|f|})^{(\nu)}|_{p_1}} .$$

$P_1(|f|)$ étant un entier algébrique et α étant tel que $0<\alpha<1$.

Il existe donc une certaine longueur $|f_0|$ du mot f à partir de laquelle

$$\alpha^{|f|} \times |P_1(|f|)^{(\nu)}|_{p_1}^{-1} \leqslant 1 .$$

D'où, pour tout mot f tel que $|f| \geqslant |f_0|$, on a l'inégalité suivante :

$$|(c\ ,\ f)^{(\nu)}|_{p_1} \leqslant \alpha^{(r-1)|f|} \times |(\mu_1^{(\nu)})^{-|f|}|_{p_1} .$$

Utilisant le lemme 4 en p-adique, on majore la valuation du déterminant $|D_f^{(\nu)}|_{p_1}$ en prenant $q \geqslant |f_0| + 1$.

$$|D^{(\nu)}|_{p_1} \leqslant \prod_{\substack{\varepsilon\leqslant g\leqslant f\\ \varepsilon\leqslant h\leqslant f}} \max|(c\ ,\ gh)^{(\nu)}|_{p_1}$$

$$|D_f^{(\nu)}|_{p_1} \leqslant (\alpha^{r-1}\times|\mu_1^{(\nu)}|_{p_1}^{-1})^2\times\ldots\times(\alpha^{r-1}\times|\mu_1^{(\nu)}|_{p_1}^{-1})^{2i}\times\ldots\times(\alpha^{(r-1)(q+1)}\times|\mu_1^{(\nu)}|_{p_1}^{-q-1})^t$$

$$|D^{(\nu)}|_{p_1} \leqslant [\alpha^{r-1}|\mu_1^{(\nu)}|_{p_1}^{-1}]^{2(-1+(q-1)2^q)+(q+1)t} .$$

Majorons les valeurs absolues de $D_f^{(\sigma)}$, valeurs absolues prises dans $\underset{\sim}{C}$, où $\sigma \in [1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ s]$.

Pour tout σ, le lemme 4 permet d'écrire

$$|D_f^{(\sigma)}| \leqslant \prod_{\substack{\varepsilon\leqslant g\leqslant f\\ \varepsilon\leqslant h\leqslant f}} [|(c\ ,\ h)^{(\sigma)}| + \ldots + |(c\ ,\ gh)^{(\sigma)}| + \ldots + |(c\ ,\ gf)^{(\sigma)}|]$$

$$|D_f^{(\nu)}|_{p_1} \prod_{\substack{1\leqslant\sigma_i\leqslant s\\ \sigma\neq(\nu)}} |D_f^{\sigma_i}| < (\alpha^{r-1}\times|\mu_1^{(\nu)}|_{p_1}^{-1})^{2(-1+(q-1)\times 2^q)+(q+1)t} \times B\ ,$$

avec $B = \prod_{1\leqslant\sigma_i\leqslant s} \times \prod_{\varepsilon\leqslant g\leqslant f,\varepsilon\leqslant h\leqslant f} [|(c\ ,\ g)^{(\sigma_i)}| + \ldots + |(c\ ,\ gf)^{(\sigma_i)}|]$.

En notant $k = 2(-1 + (q-1)2^q) + (q+1)t$, le second membre de l'inégalité s'écrit :

$$\prod_{\varepsilon\leqslant h_i\leqslant f} |((c,h_1)\ldots(c,h_k))^{\sigma_1}|\ldots|(|c,h_{s_1}|\ldots|c,h_{s_k}|)^{\sigma_s}|\ (\alpha^{r-1}|\mu_1|_{p_1}^{-1})^k\ ,$$

où $\sigma_1\,\sigma_2\,\ldots\,\sigma_s$ désigne les $\underset{\sim}{Q}$-isomorphismes de $k = \underset{\sim}{Q}(\zeta)$ dans $\underset{\sim}{C}$. Or

$$((c\ ,\ h_1)\ \ldots\ (c\ ,\ h_k))^{\sigma_1} \times \ldots \times ((c\ ,\ h_{s_1})\ \ldots\ (c\ ,\ h_{s_k}))^{\sigma_s}$$

est un entier algébrique. Il existe donc un certain entier q et un certain entier r tels que

$$\prod_{\varepsilon\leqslant h_i\leqslant f} |((c,h_1)\ldots(c,h_k))^{\sigma_1}\ldots((c,h_{s_1})\ldots(c,h_{s_k}))^{\sigma_s}|\ |\alpha^{r-1}|\mu_1)_{p_1}^{-1}|^k < 1$$

d'où $|D_f^{(\nu)}|_{p_1} |\prod_{1\leqslant i\leqslant s} D_f^{(\sigma_i)}| < 1$ à partir d'une certaine longueur du mot f. Or D_f est un entier algébrique. D'où $|D_f|_p \leqslant 1$ pour tout nombre premier p. On a donc $\prod_p |D_f|_p \prod_{1\leqslant\sigma_i\leqslant s} |D_f^{\sigma_i}| < 1$ pour tous les nombres premiers p. Donc $D_f = 0$.

La série de terme général $(c\ ,\ f)^{(\nu)}$ est rationnelle. D'où la série de terme général $(a\ ,\ f)/(P_1(|f|)\mu^{|f|} - P_2(|f|)\mu^{|f|})$ est rationnelle. Ceci termine la démonstration du théorème 1' dans tous les cas.

<u>Note</u> : Si $n = |X| \geqslant 3$, il suffit, dans les majorations données, de remplacer 2 par n, ce qui démontre le théorème 1' dans tous les cas où X est un alphabet fini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FLIESS (Michel). - Sur certaines familles de séries formelles, Thèse Sc. math. Univ. Paris-VII, 1972.

[2] LAMÈCHE (Khyra GÉRARDIN). - Extension d'un théorème de G. Cantor à des séries rationnelles en variables non commutatives, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, 1971, Série A, p. 296-298.

[3] PATHIAUX (Martine). - Algèbres de Hadamard de fractions rationnelles, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 267, 1968, Série A, p. 977-979.

[4] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - On a theorem of R. Jungen, Proc. Amer. math. Soc., t. 13, 1962, p. 885-890.

(Texte reçu le 4 novembre 1975)

Khyra GÉRARDIN
12 rue Beccaria
75012 PARIS