

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

JEAN-MARC DESHOUILLERS

## Sur la fonction de répartition de certaines fonctions arithmétiques

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 17, n° 1 (1975-1976),  
exp. n° 4, p. 1-2

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1975-1976\\_\\_17\\_1\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_1_A4_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LA FONCTION DE RÉPARTITION  
DE CERTAINES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES

par Jean-Marc DESHOUILERS

Cet exposé est la suite de celui donné ici même il y a six ans (cf. [1]), et présente le résultat principal de [2] ; j'avais formulé la conjecture suivante :

Soit  $g$  une fonction multiplicative à valeurs dans  $]0, 1[$ , telle que la fonction de répartition  $G$  des nombres  $g(p-1)$  existe et soit continue ; il y a identité entre les intervalles sur lesquels  $G$  croît strictement et ceux qui sont inclus dans l'adhérence de l'ensemble des  $g(p-1)$ , où la fonction de répartition  $G$  est définie (si elle existe) par

$$G(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} (\log N) / N \cdot \#\{p \leq N ; g(p-1) \leq x\}.$$

Cette conjecture est maintenant démontrée, et on a même le résultat plus précis suivant :

THÉORÈME. - Si la fonction  $G$  de répartition des nombres  $g(p-1)$ , où  $p$  décrit l'ensemble des nombres premiers, existe et est continue, on a l'équivalence entre les assertions :

(i)  $G(x) < G(y)$  ;

(ii) il existe un nombre premier impair  $p_0$  tel que  $x < g(p_0-1) < y$ .

Si, en outre, la série de terme général  $1 - g(p)$  diverge tandis que son terme général  $\rightarrow 0$ , la fonction  $G$  est strictement croissante sur  $]0, \sup_{k \in \mathbb{N}^*} g(2^k)[$ , on a

$$G(\sup_{k \in \mathbb{N}^*} g(2^k)) = 1$$

La démonstration utilise d'abord une caractérisation (due à ELLIOTT, DABOUSSI et DELANGE) des fonctions multiplicatives  $g$ , à valeurs dans  $]0, 1[$ , dont la fonction de répartition  $G$  associée existe et est continue.

On construit ensuite (on reconnaîtra le principe fondamental de [1], encore que les détails soient assez différents) une progression arithmétique  $A_\varepsilon$  telle que la moyenne des valeurs  $g(p-1)$ , quand  $p$  appartient à  $A_\varepsilon$ , soit proche de  $g(p_0-1)$ , et telle que, pour tout  $p$  dans  $A_\varepsilon$ , la valeur  $g(p-1)$  ne dépasse pas  $g(p_0-1) + \varepsilon$ .

Mentionnons enfin que l'on étudie dans [2] la répartition des nombres  $g(F(p))$ , où  $F$  est un polynôme à coefficients entiers et à valeurs positives.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] DESHOUILERS (J.-M.). - Sur la fonction de répartition de certaines fonctions arithmétiques définies sur l'ensemble des nombres premiers moins un, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 11e année, 1969/70, n° 17, 13 p.
- [2] DESHOUILERS (J.-M.). - Sur la croissance de certaines fonctions de répartition, Compositio Math., Groningen, t. 31, 1975, p. 259-284.
- [3] ELLIOTT (P. D. T. A.). - On the limiting distribution of  $f(p+1)$  for non-negative additive functions, Acta Arithm., Warszawa, t. 25, 1974, p. 259-264.

(Texte reçu le 19 juillet 1976)

Jean-Marc DESHOUILERS  
Mathématiques  
Université de Bordeaux-I  
351 cours de la Libération  
33405 TALENCE

---