Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Henri Cohen

Forces modulaires à une et deux variables

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, nº 1 (1975-1976), exp. nº 1, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_1_A1_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° 1, 10 p.

6 octobre 1975

FORMES MODULAIRES À UNE ET DEUX VARIABLES

par Henri COHEN

1. Rappels sur les formes modulaires de Hilbert.

Soient K un corps quadratique réel de discriminant D, $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K, $\mathfrak{d}$ la différente de K, U le groupe des unités de $\mathcal{O}_K$. Nous noterons x' le conjugué de x dans K, et nous écrirons $x \gg 0$ si x est totalement positif, i. e. si $x > 0$ et $x' > 0$. Enfin, si $A \subset K$, nous noterons A^+ l'ensemble des éléments totalement positifs de A.

Soit Γ un sous-groupe de $SL_2(\mathcal{O}_K)$. Nous noterons Γ^e le sous-groupe de $GL_2(\mathcal{O}_K)$ engendré par Γ et par le groupe $\mathcal{E}$ des matrices $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ vérifiant ε_1, $\varepsilon_2 \in U$, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \in U^+$.

PROPOSITION 1.1. - Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Γ est un sous-groupe distingué de Γ^e,

(ii) Toute matrice de Γ^e est de la forme $M\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$, où $M \in \Gamma$ et $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$,

(iii) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma \Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta\varepsilon^{-1} \\ \gamma\varepsilon & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$ pour tout $\varepsilon \in U^+$.

La démonstration est évidente. Un groupe vérifiant les conditions de la proposition 1.1 sera dit distingué.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal entier de $\mathcal{O}_K$. Nous introduisons les groupes suivants, qui sont distingués d'après (iii) :

$$\Gamma(\mathfrak{a} ; \mathcal{O}_K) = \{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}_K) , \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod \mathfrak{a}\}$$

$$\Gamma_0(\mathfrak{a} ; \mathcal{O}_K) = \{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}_K) , \gamma \in \mathfrak{a}\} .$$

Nous dirons qu'un sous-groupe Γ de $SL_2(\mathcal{O}_K)$ est de niveau $\mathfrak{a}$ si $\mathfrak{a}$ est le plus grand idéal tel que $\Gamma \supset \Gamma(\mathfrak{a} ; \mathcal{O}_K)$.

Γ est un sous-groupe de congruence si son niveau est différent de (0). Par exemple, si $\mathfrak{a} \neq (0)$, $\Gamma_0(\mathfrak{a} ; \mathcal{O}_K)$ est un sous-groupe de congruence de niveau $\mathfrak{a}$.

Enfin si $\mathfrak{a} \neq 0$, nous appellerons caractère modulo $\mathfrak{a}$ un caractère du groupe $(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a})^*$ prolongé en une application de $\mathcal{O}_K$ dans $\mathbb{C}$ de la façon habituelle.

DÉFINITION 1.2. - Soit $\mathcal{H}$ le demi-plan de Poincaré, et soit E une application de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ dans $\mathbb{C}$. Nous dirons que E est une forme modulaire de Hilbert de poids entier k et de caractère χ sur Γ^e, où Γ est un sous-groupe de congruence de $\Gamma_0(\mathfrak{a} ; \mathcal{O}_K)$ et χ un caractère modulo $\mathfrak{a}$ avec $\mathfrak{a} \neq 0$, si :

1° E est holomorphe sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, 2° Pour tout $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in \Gamma^e$ et pour tout $(z_1 , z_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, on a

$$E\left(\frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta} , \frac{\alpha' z_2 + \beta'}{\gamma' z_2 + \delta'}\right) = \chi(\delta)(\gamma z_1 + \delta)^k (\gamma' z_2 + \delta')^k E(z_1 , z_2) .$$

On sait que, contrairement au cas d'une variable, ceci entraîne que E possède un développement de Fourier de la forme :

$$E(z_1 , z_2) = c(0) + \sum_{\nu\in\delta^{-1}, \nu\gg 0} \exp(2i\pi(\nu z_1 + \nu' z_2)) c(\nu) .$$

D'autre part, on voit facilement que si $E \not\equiv 0$, on doit avoir :

(a) $\chi(\varepsilon) = (N_{K/\mathbb{Q}}(\varepsilon))^k$, $\forall\ \varepsilon \in U$

(b) $c(\nu\varepsilon) = c(\nu)$, $\forall\ \varepsilon \in U^+$.

La condition (b) entraîne en particulier que le coefficient $c(\nu)$ ne dépend que de l'idéal entier $\nu\delta$.

2. Enoncé du théorème principal.

En calculant le développement de Fourier des séries d'Eisenstein-Hecke attachées à K (séries qui sont l'analogue des séries d'Eisenstein pour les formes modulaires de Hilbert), on démontre la proposition suivante (voir par exemple [1]).

PROPOSITION 2.1. - *Posons pour* k *entier pair* ≥ 2 et $(z_1 , z_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$:

$$G_k(z_1 , z_2) = \frac{1}{4} \zeta_K(1 - k) + \sum_{\nu\in\delta^{-1}, \nu\gg 0} \exp(2i\pi(\nu z_1 + \nu' z_2)) c(\nu\delta) ,$$

avec

$$c(\nu\delta) = \sum_{d|(\nu\delta), d\in\mathbb{N}^*} d^{k-1}\left(\frac{D}{d}\right) \sigma_{k-1}\left(N_{K/\mathbb{Q}}\left(\frac{\nu\delta}{d}\right)\right) .$$

Alors G_k *est une forme modulaire de Hilbert sur* $SL_2(\mathcal{O}_K)$.

Il est naturel de se demander si cette proposition reste vraie si on remplace $\sigma_{k-1}(n)$ par le n-ième coefficient d'une forme modulaire, par exemple par $\tau(n)$. Le théorème principal de cet exposé est que, essentiellement, il en est bien ainsi. Plus précisément, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 2.2. - *Soit* N *un entier divisible par* 4, *et soit*

$$f = \sum_{n\geq 1} a(n)\ q^n \in S_k(\Gamma_0(N) , \chi)$$

une forme parabolique sur $\Gamma_0(N)$ *de caractère* χ *avec* $k \geq 3$ *entier. Pour* $(z_1 , z_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, *posons* :

$$E_f(z_1,z_2) = \sum_{\substack{\nu\in\delta^{-1}\\ \nu\gg 0}} \exp(2i\pi(\nu z_1+\nu' z_2)) \sum_{d|(\nu\delta), d\in\mathbb{N}^*} d^{k-1} \chi(d)\left(\frac{D}{d}\right) a\left(N_{K/\mathbb{Q}}\left(\frac{\nu\delta}{d}\right)\right) .$$

Alors E_f *est une forme modulaire de Hilbert de poids* k *et de caractère* $\chi \circ N_{K/\mathbb{Q}}$ *sur le sous-groupe* Γ_{N_1} *de* $GL_2(\mathcal{O}_K)$, *engendré par* $\Gamma_0(N_1)$ *et par le groupe des matrices* $\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \beta\\ 0 & \varepsilon_2\end{pmatrix}$ *où* $\beta \in \mathcal{O}_K$, $\varepsilon_1 , \varepsilon_2 \in U$, $\varepsilon_1 . \varepsilon_2 \in U^+$, *où on a posé* $N_1 = 2N/(4 , D)$.

Nous décrirons plus loin en détail le groupe en question. Il suffit ici de dire que c'est un sous-groupe de congruence dont le niveau est souvent égal à N_1.

Avant d'aborder la démonstration du théorème 2.2, il est utile de faire plusieurs remarques.

REMARQUE 2.3. – Le calcul explicite des coefficients de Fourier des séries d'Eisenstein-Hecke avec caractères semble montrer que le théorème s'étend aux formes modulaires non paraboliques en rajoutant le terme constant

$$\frac{a(0)}{2} L(1-k\ ,\ \chi(\tfrac{D}{\cdot}))$$

à la définition de $E_f(z_1\ ,\ z_2)$. Toutefois je n'ai pu montrer cela que pour certaines séries d'Eisenstein-Hecke, et je n'ai donc pas de résultat valable pour toute forme modulaire.

REMARQUE 2.4. – Il est naturel de penser que E_f est modulaire sur le groupe $\Gamma_0^e(N_1\ \mathcal{O}_K\ ;\ \mathcal{O}_K)$. Cela pourrait peut être se démontrer en trouvant explicitement le "noyau" de l'application $f \longrightarrow E_f$ au sens de ZAGIER [6].

REMARQUE 2.5. – Notre résultat est du même type qu'un résultat de ZAGIER (voir [6], corollaire au théorème 2). Toutefois le résultat de ZAGIER n'est applicable qu'aux formes $f \in S_k(\Gamma_0(D)\ ,\ (\frac{D}{\cdot}))$ et les coefficients de la forme à deux variables associée font intervenir explicitement les développements de f à toutes les pointes et pas seulement à l'infini.

REMARQUE 2.6. – Comme le montre la démonstration, le théorème 2.2 reste valable pour $k = 1$ et $k = 2$ à condition de modifier le niveau N_1 et d'imposer certaines restrictions à f. Peut-être reste-t-il valable tel quel ?

3. Outils de la démonstration.

Notre premier outil est le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1 (SHIMURA [4], NIWA [3]). – Soit $g = \sum_{n\geq 1} b(n)\ q^n \in S_{k+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(N)\ ,\ \chi)$ avec $k \geq 3$. Si on pose, pour t sans facteur carré :

$$G_t = \sum_{n\geq 1} q^n \sum_{d|n} d^{k-1}\ \chi(d)(\tfrac{-4}{d})^k\ (\tfrac{t}{d})\ b((n/d)^2\ t)\ ,$$

alors $G_t \in M_{2k}(\Gamma_0(N/2)\ ,\ \chi^2)$.

Ce théorème a été démontré par SHIMURA ("Main theorem") pour $k \geq 1$ et avec une condition assez faible sur g, mais avec $N/2$ remplacé par un entier N_t dépendant a priori de t. La forme que nous donnons ici a été obtenue par NIWA, et nécessite $k \geq 3$.

Notre deuxième outil est le suivant :

THÉORÈME 3.2 (COHEN [2]). – Soient $f_1 \in M_{k_1}(\Gamma_0(N)\ ,\ \chi_1)$ et $f_2 \in M_{k_2}(\Gamma_0(N), \chi_2)$

deux formes de poids entier ou demi-entier. On a alors $f_1 f_2 \in M_{k_1+k_2}(\Gamma_0(N), \chi)$ pour un caractère χ modulo N. Pour tout $n \geq 0$, posons :

$$F_n(f_1,f_2) = \sum_{\ell=0}^{n}(-1)^{\ell}\binom{n}{\ell}\frac{(k_1+n-1)!\,(k_2+n-1)!}{(k_1+n-\ell-1)!\,(k_2+\ell-1)!}\frac{\partial^{n-\ell} f_1}{\partial z^{n-\ell}}\frac{\partial^{\ell} f_2}{\partial z^{\ell}}$$
$$= \sum_{\ell=0}^{n}(-1)^{\ell}\binom{n}{\ell}\frac{(k_1+n-1)!\,(k_1+k_2+2n-\ell-2)!}{(k_1+n-\ell-1)!\,(k_1+k_2+n-2)!}\frac{\partial^{\ell}}{\partial z^{\ell}}\left(f_2 \times \frac{\partial^{n-\ell} f_1}{\partial z^{n-\ell}}\right)$$

Alors $F_n(f_1, f_2) \in M_{k_1+k_2+2n}(\Gamma_0(N), \chi)$.

Par exemple :

$$F_1(f_1, f_2) = k_2 f_1' f_2 - k_1 f_1 f_2' \in M_{k_1+k_2+2}(\Gamma_0(N), \chi)$$

$$F_2(f_1,f_2)=k_2(k_2+1)f_1'' f_2-2(k_1+1)(k_2+1)f_1' f_2'+k_1(k_1+1)f_1 f_2'' \in M_{k_1+k_2+4}(\Gamma_0(N),\chi).$$

Appliquant ce théorème à $f_1 = \theta(z) = \sum_{s\in\underset{\sim}{Z}} q^{s^2}$ et $f_2 = f(|x|z)$, on peut obtenir le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.3 (COHEN [2]). - Soit $f = \sum_{n\geq 0} a(n)\, q^n \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$ et soit $x \equiv 0$ ou $1 \pmod 4$. Posons :

$$S_x^f(z, u) = \sum_{n\geq 0} q^n\left(\sum_{s\in\underset{\sim}{Z}}\frac{a((n-s^2)/|x|)}{(1-2su+nu^2)^{k-(1/2)}}\right)$$

où on convient que $a(p) = 0$ si $p \notin \underset{\sim}{N}$. Alors le coefficient de $u^{2\ell}$ dans $S_x^f(z, u)$ appartient à $M_{2\ell+k+(1/2)}(\Gamma_0(Nx), \chi(\frac{-4}{\cdot})^k)$. Son développement de Fourier s'écrit :

$$\frac{1}{(k-(3/2))!}\sum_{n\geq 0} q^n\left[\sum_s\left(\sum_{0\leq m\leq\ell}(-1)^m\frac{(2\ell+k-m-(3/2))!}{m!\,(2\ell-2m)!}\,n^m(2s)^{2\ell-2m}\right)a\left(\frac{n-s^2}{|x|}\right)\right].$$

Joignant ceci au théorème 3.1, on obtient le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.4. - Soit $f = \sum_{n\geq 1} a(n)\, q^n \in S_k(\Gamma_0(N), \chi)$, où $4|N$, et k est entier. Posons :

$$E_D^{\ell}(f) = \sum_{n\geq 1} q^n\left[\sum_{d|n} d^{2\ell+k-1}\chi(d)\left(\frac{D}{d}\right)\sum_{s\in\underset{\sim}{Z}} a\left(\frac{(n/d)^2 D - s^2}{4}\right) P_{\ell}(n/d, s)\right]$$

où

$$P_{\ell}(n/d, s) = \sum_{0\leq m\leq\ell}(-1)^m\frac{\Gamma(2\ell+k-m-(1/2))}{m!\,(2\ell-2m)!}\left(\frac{n}{d}\right)^{2m} D^m(2s)^{2\ell-2m}.$$

Alors $E_D^{\ell}(f) \in S_{2k+4\ell}(\Gamma_0(N_1), \chi^2)$ avec $N_1 = 2N/(4, D)$.

Démonstration. - Si $D \equiv 1 \pmod 4$ (resp. $D \equiv 0 \bmod 4$), on prend $x = 4$ (resp. $x = 1$) dans le corollaire 3.3, et on applique le théorème 3.1 au coefficient de $u^{2\ell}$ dans $S_x^f(z, u)$ avec $t = D$ (resp. $t = D/4$).

4. Démonstration du théorème 2.2.

Nous devons démontrer que $\forall\ (z_1, z_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$:

$$(1)\qquad E_f\left(\frac{\alpha z_1+\beta}{\gamma z_1+\delta}, \frac{\alpha' z_2+\beta'}{\gamma' z_2+\delta'}\right) = \chi(\delta\delta')(\gamma z_1+\delta)^k(\gamma' z_2+\delta')^k E_f(z_1,z_2)$$

pour tout $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ appartenant au groupe Γ_{N_1}, engendré par $\Gamma_0(N_1)$ et les matrices $\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \beta\\ 0 & \varepsilon_2\end{pmatrix}$ avec $\beta \in \mathcal{O}_K$, ε_1, $\varepsilon_2 \in U$, $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \in U^+$.

LEMME 4.1. - Si (1) est vraie pour $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{pmatrix}$, alors (1) est vraie aussi pour le produit $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{pmatrix}$.

En effet, la vérification est immédiate à part la vérification de

$$\chi((\gamma_1\,\beta_2 + \delta_1\,\delta_2)(\gamma_1'\,\beta_2' + \delta_1'\,\delta_2')) = \chi(\delta_1\,\delta_1'\,\delta_2\,\delta_2')\ .$$

Or il est clair que $\Gamma_{N_1} \subset \Gamma_0^e(N_1\,\mathcal{O}_K\,;\,\mathcal{O}_K)$ et donc

$$(\gamma_1\,\beta_2 + \delta_1\,\delta_2)(\gamma_1'\,\beta_2' + \delta_1'\,\delta_2') \equiv \delta_1\,\delta_1'\,\delta_2\,\delta_2' + N_1\,\mathrm{Tr}(\lambda) \pmod N$$

avec $\lambda = (\gamma_1/N_1)\beta_2\,\delta_1'\,\delta_2' \in \mathcal{O}_K$, puisque N_1 est pair et multiple de $N/2$.

Si $D \equiv 1 \pmod 4$, on a $N_1 = 2N$, donc $N|N_1\,\mathrm{Tr}(\lambda)$.

Si $D \equiv 0 \pmod 4$, on a $N_1 = N/2$, mais dans ce cas $\frac{1}{2} \in \delta^{-1}$; en d'autres termes, la trace d'un élément de $\mathcal{O}_K$ est toujours paire, et donc $N|N_1\,\mathrm{Tr}(\lambda)$ à nouveau, ce qui démontre le lemme 4.1, χ étant un caractère modulo N.

D'autre part, si $f \neq 0$, on doit avoir $\chi(-1) = (-1)^k$, et il en résulte, d'après l'écriture même de E_f, que (1) est vraie pour une matrice de la forme $\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \beta\\ 0 & \varepsilon_2\end{pmatrix}$.

Il suffit donc de démontrer (1) pour $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \Gamma_0(N_1)$. Nous fixerons $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \Gamma_0(N_1)$ dans toute la suite de la démonstration, et nous poserons :

$$h(z_1,z_2) = E_f\left(\frac{az_1+b}{cz_1+d}\,,\,\frac{az_2+b}{cz_2+d}\right) - \chi^2(d)(cz_1+d)^k\,(cz_2+d)^k\,E_f(z_1,z_2)\ .$$

Nous devons démontrer que h est identiquement nulle. Pour cela, nous allons démontrer que, pour tout $(i\,,\,j) \in \underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N}$, on a $((\partial^i/\partial z_1^i)(\partial^j/\partial z_2^j)h)(z\,,\,z) = 0$ pour $z \in \mathcal{H}$. La fonction h étant analytique, ceci entraînera bien que h est identiquement nulle.

Nous raisonnerons par récurrence sur $i + j$. Je donne la démonstration en détail pour $i + j \leq 2$, et je donnerai des indications pour $i + j > 2$.

On peut écrire

$$E_f(z_1,z_2) = \sum_{\substack{\nu\in\delta^{-1}\\ \nu\gg 0\\ \nu=(s+n\sqrt{D})/2\sqrt{D}}} \exp(2i\pi(\nu z_1+\nu'\,z_2))\ \sum_{d|n} d^{k-1}\,\chi(d)\left(\frac{D}{d}\right)\,a\left(\frac{(n/d)^2\,D-(s/d)^2}{4}\right)$$

et en posant $q = \exp(2i\pi((z_1 + z_2)/2))$, $\tau = \exp(2i\pi((z_1 - z_2)/2\sqrt{D}))$:

$$(2)\qquad E_f(z_1\,,\,z_2) = \sum_{n\geq 1} q^n \sum_{d|n} d^{k-1}\,\chi(d)\left(\frac{D}{d}\right) \sum_s \tau^{sd}\,a\left(\frac{(n/d)^2\,D - s^2}{4}\right)\ .$$

On voit donc que

$$E_f(z\,,\,z) = (E_D^0(f)/(k - 3/2)!)\ ,$$

et l'annulation de $h(z\,,\,z)$ résulte du corollaire 3.4, d'où le cas $i + j = 0$.

Dérivant l'égalité $h(z, z) = 0$, on obtient $h'_{z_1}(z, z) + h'_{z_2}(z, z) = 0$. Mais, d'autre part, il est clair que $E_f(z_2, z_1) = E_f(z_1, z_2)$, donc

$$h(z_2, z_1) = h(z_1, z_2) .$$

Ceci entraîne en particulier que

$$(\partial^i/(\partial z_1^i)\ \partial^j/(\partial z_2^j)h)(z, z) = (\partial^j/(\partial z_1^j)\ \partial^i/(\partial z_2^i)h)(z, z) = 0 .$$

Ici on a $h'_{z_1}(z, z) = h'_{z_2}(z, z)$, et donc, d'après ce qui précède,

$$h'_{z_1}(z, z) = h'_{z_2}(z, z) = 0 ,$$

d'où le cas $i + j = 1$.

Dérivant à nouveau ces identités on obtient :

$$h''_{z_1^2}(z, z) = h''_{z_2^2}(z, z) = - h''_{z_1 z_2}(z, z) .$$

Admettons provisoirement le lemme suivant :

LEMME 4.2. – $kh''_{z_1^2}(z, z) - 2(k + 1)\ h''_{z_1 z_2}(z, z) + kh''_{z_2^2}(z, z) = 0$.

On aura alors $(4k + 2)h''_{z_1^2}(z, z)$, et ceci entraîne donc l'annulation des trois dérivées secondes.

Pour démontrer le lemme 4.2, un calcul explicite montre que

$$kh''_{z_1^2}(z,z)-2(k+1)h''_{z_1 z_2}(z,z)+kh''_{z_2^2}(z,z) = \frac{1}{(cz+d)^4}\left[F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)-\chi^2(d)(cz+d)^{2k+4}\ F(z)\right]$$

avec

$$F(z) = k(\partial^2\ E_f/\partial z_1^2)(z,z) - 2(k+1)(\partial^2\ E_f/\partial z_1\ \partial z_2)(z,z)+k(\partial^2\ E_f/\partial z_2^2)(z,z) .$$

Utilisant (2) on obtient aisément

$$\frac{1}{(2i\pi)^2}F(z)=\frac{1}{2D}\sum_{n\geq 1} q^n \sum_{d|n} d^{k+1}\ \chi(d)\left(\frac{D}{d}\right) \sum_s((2k+1)s^2-(n/d)^2\ D)a\left(\frac{(n/d)^2\ D-s^2}{4}\right)$$

$$= (E_D^1(f)/(k - 3/2)!\ 2D) ,$$

et donc le lemme 4.2 résulte du corollaire 3.4.

La démonstration générale se fait suivant le même schéma, mais il s'introduit une assez grande complexité combinatoire. Je ne donnerai donc que les lemmes et propositions intermédiaires, sans démonstration.

PROPOSITION 4.3. – Pour tout $\ell \geq 0$, posons

$$F_\ell(z) = \sum_{0\leq m\leq \ell}(-1)^m \frac{(2\ell+k-m-3/2)!\,2^{2\ell-2m}}{m!\,(2\ell-2m)!\,(k-3/2)!}\left(\left(\frac{\partial}{\partial z_1}+\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{2m}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}-\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{2\ell-2m} E\right)(z,z) .$$

Alors

$$F_\ell(z) = \frac{(2i\pi)^{2\ell}}{(k - 3/2)!\ D^\ell}\ E_D^\ell(f) \text{ , et en particulier } F_\ell \in S_{2k+4\ell}(\Gamma_0(N_1), \chi^2) .$$

COROLLAIRE 4.4. – On a $F_n(z) = \sum_{0\leq a\leq 2n}(-1)^a\ ((\partial^a/\partial z_1^a)(\partial^{2n-a}/\partial z_1^{2n-a})E_f)(z,z).c_{n,a}$ avec

$$c_{n,a} = \frac{(k-1)!\ (k+2n-1)!\ (2k+2n-2)!}{(2k-2)!\ a!\ (2n-a)!\ (k+a-1)!\ (k+2n-a-1)!}$$

Introduisons les opérateurs $D_{z_i} = (cz_i + d)^2 \frac{\partial}{\partial z_i}$ pour $i = 1, 2$. On a le lemme suivant.

LEMME 4.5.

(a) $$D^i_{z_1} D^j_{z_2} = \sum_{\substack{0\leq m\leq i\\ 0\leq p\leq j}} (\frac{\partial}{\partial z_1})^m (\frac{\partial}{\partial z_2})^p (cz_1+d)^{m+i} (cz_2+d)^{p+j} \frac{(i-1)!(j-1)!}{(m-1)!(p-1)!} \binom{i}{m}\binom{j}{p} c^{i+j-m-p}$$

(b) $$(\frac{\partial}{\partial z_1})^i (\frac{\partial}{\partial z_2})^j = \sum_{\substack{0\leq m\leq i\\ 0\leq p\leq j}} D^m_{z_1} D^p_{z_2} (cz_1+d)^{-m-i} (cz_2+d)^{-p-j} \frac{(i-1)!(j-1)!}{(m-1)!(p-1)!} \binom{i}{m}\binom{j}{p} (-c)^{i+j-m-p}$$

avec la convention $(-1)!/(-1)! = 1$.

Il résulte de ce lemme que l'annulation des expressions $((\partial/\partial z_1)^i (\partial/\partial z_2)^j h)(z,z)$ pour tout (i, j) tel que $i + j \leq \lambda$ est équivalente à l'annulation des $(D^i_{z_1} D^j_{z_2} h)(z, z)$ pour tout (i, j) tel que $i + j \leq \lambda$.

PROPOSITION 4.6.

$$D^i_{z_1} D^j_{z_2} h(z_1,z_2) = (\frac{\partial}{\partial z_1})^i (\frac{\partial}{\partial z_2})^j E_f(\frac{az_1+b}{cz_1+d}, \frac{az_2+b}{cz_2+d}) - \chi^2(d)(cz_1+d)^{2i+k}(cz_2+d)^{2j+k}$$
$$\times (\frac{\partial}{\partial z_1})^i (\frac{\partial}{\partial z_2})^j E_f(z_1,z_2) - \chi^2(d) \sum_{\substack{0\leq m\leq i\\ 0\leq p\leq j\\ m+p<i+j}} (\frac{\partial}{\partial z_1})^m (\frac{\partial}{\partial z_2})^p E_f(z_1,z_2)(cz_1+d)^{m+i+k}(cz_2+d)^{p+j+k}$$
$$\times \frac{(i+k-1)!\ (j+k-1)!}{(m+k-1)!\ (p+k-1)!} \binom{i}{m}\binom{j}{p} c^{i+j-m-p}.$$

LEMME 4.7. - Posons $G_n(z) = \sum_{0\leq a\leq 2n} (-1)^a c_{n,a} (D^a_{z_1} D^{2n-a}_{z_2} h)(z, z)$. Alors

$$G_n(z) = F_n(\frac{az+b}{cz+d}) - \chi^2(d)(cz+d)^{4n+2k} F_n(z) = 0 .$$

La dernière égalité résulte bien sûr de la proposition 4.3.

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du théorème 2.2. Supposons que $((\frac{\partial}{\partial z_1})^i (\frac{\partial}{\partial z_2})^j h)(z, z) = 0$ pour tout (i, j) avec $i + j < \lambda$, ou, ce qui revient au même, que $(D^i_{z_1} D^j_{z_2} h)(z, z) = 0$ pour tout (i, j) avec $i + j < \lambda$.

Si λ est impair, la dérivation de ces égalités, jointe à la symétrie $h(z_2, z_1) = h(z_1, z_2)$, donne immédiatement $((\frac{\partial}{\partial z_1})^i (\frac{\partial}{\partial z_2})^j h)(z, z) = 0$ pour $i + j \leq \lambda$.

Si λ est pair, cela montre seulement que

$$(D^i_{z_1} D^{\lambda-i}_{z_2} h)(z, z) = (-1)^{\lambda-i} (D^\lambda_{z_1} h)(z, z) .$$

Appliquant le lemme 4.7 avec $n = \lambda/2$, on obtient

$$\sum_{0\leq a\leq\lambda} (-1)^a c_{\lambda/2,a} ((D^a_{z_1} D^{\lambda-a}_{z_2}) h)(z, z) = 0 ,$$

d'où

$$(\sum_{0\leq a\leq\lambda} c_{\lambda/2,a})(D^\lambda_{z_1} h)(z, z) = 0$$

ce qui entraîne bien l'annulation des dérivées d'ordre λ puisque $c_{\lambda/2,a} > 0$, d'où le théorème 2.2.

5. Liens avec le "Main theorem" de Shimura.

Soit $M_k(\Gamma_{N_1}, \chi \circ N_{K/\mathbb{Q}})$ l'espace des formes modulaires de Hilbert sur Γ_{N_1} de caractère $\chi \circ N_{K/\mathbb{Q}}$. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
S_k(\Gamma_0(N), \chi) \arrow[r, "E"] \arrow[d, "\varphi"'] & M_k(\Gamma_{N_1}, \chi \circ N_{K/\mathbb{Q}}) \arrow[d, "(z,z)"] \\
S_{k+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(2N_1), \chi') \arrow[r, "G_t"'] \arrow[ur, dashed, "\Psi_D"] & M_{2k}(\Gamma_0(N_1), \chi^2)
\end{tikzcd}$$

Les flèches horizontales sont respectivement l'application $f \longmapsto E_f$, définie par le théorème 2.2, et l'application $g \longmapsto G_t$ de Shimura, avec $t = D$ si $D \equiv 1 \mod 4$, $t = D/4$ sinon.

La 1re flèche verticale est l'application $f(z) \longmapsto f(4z)\,\theta(z)$ si $D \equiv 1 \pmod 4$, $f(z) \longmapsto f(z)\,\theta(z)$ si $D \equiv 0 \pmod 4$. La 2e flèche verticale est la restriction à la diagonale. Le cas $(i, j) = (0, 0)$ de la démonstration du théorème 2.2 montre que ce diagramme est commutatif.

Il serait intéressant de savoir s'il existe une application naturelle

$$\Psi_D : S_{k+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(2N_1), \chi') \longrightarrow M_k(\Gamma_{N_1}, \chi \circ N_{K/\mathbb{Q}})$$

qui laisse le diagramme commutatif. En effet, cela donnerait une factorisation de l'homomorphisme de Shimura G_t , et montrerait que l'homomorphisme vraiment intéressant est plutôt Ψ_D .

Je sais répondre à cette question dans le cas particulier $N = 4$ et $D \equiv 0 \mod 4$. En effet, il est facile de voir que, dans ce cas, φ est un isomorphisme, et donc Ψ_D n'est autre que $E \circ \varphi^{-1}$.

Il serait intéressant, même dans ce cas particulier, d'avoir une démonstration du théorème 2.2 n'utilisant pas le théorème de Shimura, puisque cela en redonnerait une démonstration.

6. Les groupes Γ_M .

Il nous reste à montrer que le groupe Γ_{N_1} est un sous-groupe de congruence.

Soit $(1, \theta)$ une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{O}_K$, et soit $u_1 + u_2\theta$ $(u_1, u_2 \in \mathbb{Z})$ un générateur de U^+ . On a le théorème suivant :

THÉORÈME 6.1. – <u>Soit</u> $M \geq 1$ <u>un entier</u>. <u>Posons</u> $u_4 = (u_2, M)$ <u>et</u> $V = 2$ <u>si</u> $v_2(u_2) > v_2(M) \geq 1$, $V = 1$ <u>sinon, où</u> v_2 <u>est la valuation</u> 2-<u>adique</u>. <u>Alors</u> $\Gamma_M = G_M^e$ <u>avec</u> $G_M \subset SL_2(\mathcal{O}_K)$ <u>et</u> $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G_M$ <u>si, et seulement si,</u>

(i) $\alpha, \delta \in \mathbb{Z} + M\mathcal{O}_K$, $\gamma \in M(\mathbb{Z} + u_4\,\mathcal{O}_K)$;

(ii) <u>Si on écrit</u> $\gamma = M(c_1 + c_2 u_4 \theta)$, $\delta = d_1 + d_2 M\theta$, <u>on a</u>

$$d_2(c_1+1) \equiv c_2 \pmod{V} .$$

<u>En particulier,</u> G_M <u>est un groupe distingué dont le niveau divise</u> $Mu_4\,V$.

<u>Démonstration</u>. – La démonstration est longue, et je me bornerai à en esquisser les étapes principales. L'outil principal est le théorème suivant, dû à VASERŠTEIN [5] :

THÉORÈME 6.2 (VASERŠTEIN). – <u>Soient</u> $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ <u>deux idéaux de</u> $\mathcal{O}_K$. <u>Le groupe engendré par les matrices</u> $\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ <u>avec</u> $\beta \in \mathfrak{q}_1$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ \gamma & 1\end{pmatrix}$ <u>avec</u> $\gamma \in \mathfrak{q}_2$, <u>est égal à l'ensemble des matrices</u> $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}_K)$ <u>avec</u> $\alpha , \delta \in 1+\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$, $\beta \in \mathfrak{q}_1$, $\gamma \in \mathfrak{q}_2$.

Pour démontrer le théorème 6.1, on montre d'abord que G_M est un groupe distingué. Il en résulte aisément que $\Gamma_M \subset G_M^e$. Réciproquement, il faut montrer que $G_M \subset \Gamma_M$. Nous montrons cela en 7 étapes :

1° On a $\begin{pmatrix}(u_1+u_2\theta)^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ M & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1+u_2\theta & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in \Gamma_M$, donc $\Gamma_M \supset \begin{pmatrix}1 & 0\\ M(\underset{\sim}{Z}+u_2\,\mathcal{O}_K) & 1\end{pmatrix}$ puisque $\Gamma_M \supset \Gamma_0(M)$.

Appliquant le théorème de Vaserštein, on en déduit

$$(6.3)\qquad \Gamma_M \supset \{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}_K) ,\quad \alpha , \delta \in 1+Mu_2\,\mathcal{O}_K ,\quad \gamma \in Mu_2\,\mathcal{O}_K\}$$

2° En multipliant à droite par $\Gamma_0(M)$, on montre que

$$(6.4)\qquad \Gamma_M \supset \{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}_K) ,\quad \alpha , \delta \in \underset{\sim}{Z}+Mu_2\,\mathcal{O}_K ,\quad \gamma \in M(\underset{\sim}{Z}+u_2\,\mathcal{O}_K)\}$$

3° En multipliant à gauche par $\Gamma_0(M)$, on montre

$$(6.5)\qquad \Gamma_M \supset \{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}_K) ,\quad \alpha\in\underset{\sim}{Z}+Mu_2\,\mathcal{O}_K ,\quad \gamma\in M(\underset{\sim}{Z}+u_2\,\mathcal{O}_K) ,\quad \delta\in\underset{\sim}{Z}+M\mathcal{O}_K\}$$

4° Posons $u_3 = (u_2 , M^\infty) = \prod_{p\mid(u_2,M),\,p^\beta\| u_2} p^\beta$. En multipliant à droite par $\Gamma_0(M)$, on montre que

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ Mu_3\,\theta & 1\end{pmatrix} \in \Gamma_M .$$

Cela montre que, dans tout ce qui précède, on peut remplacer u_2 par u_3 et donc :

$$(6.6)\qquad \Gamma_M \supset \{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}_K) ,\quad \alpha\in\underset{\sim}{Z}+Mu_3\,\mathcal{O}_K ,\quad \gamma\in M(\underset{\sim}{Z}+u_3\,\mathcal{O}_K) ,\quad \delta\in\underset{\sim}{Z}+M\mathcal{O}_K\}$$

5° En multipliant à droite par une matrice de la forme $\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, on montre

$$(6.7)\qquad \Gamma_M\supset\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in SL_2(\mathcal{O}_K) ,\ \alpha,\delta\in\underset{\sim}{Z}+M\mathcal{O}_K ,\ \gamma=M(c_1+c_2\,u_3\,\theta) \text{ avec } (c_1,u_3)=1\} .$$

6° En multipliant à gauche par $\Gamma_0(M)$, on montre

$$(6.8)\qquad \begin{aligned}\Gamma_M \supset G = \{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}_K) ,\quad & \alpha = a_1+Ma_2\,\theta ,\\ & \gamma=M(c_1+c_2\,u_3\,\theta) ,\ \delta\in\underset{\sim}{Z}+M\mathcal{O}_K \text{ avec } \Big(c_1 , \frac{c_1}{(u_3, a_2 M)}\Big)=1\}\end{aligned}$$

7° En multipliant à droite par G , on montre que

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ MWu_4\,\theta & 1\end{pmatrix} \in \Gamma_M ,$$

où $W=1$ ou 2 selon que M/u_4 est pair ou impair.