Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Marie-France Vignéras

Séries thêta des formes quadratiques indéfinies

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, n° 1 (1975-1976), exp. n° 20, p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_1_A18_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° 20, 3 p.

1er mars 1976

SÉRIES THÊTA DES FORMES QUADRATIQUES INDÉFINIES

par Marie-France VIGNÉRAS

Dans cet exposé, a été donné un critère simple, pour construire des séries thêta attachées à des formes quadratiques indéfinies, généralisant les conditions usuelles d'homogénéité et de sphéricité, pour les formes quadratiques définies positives. Ce critère m'a été suggéré par EICHLER, et sa démonstration a bénéficié des conseils de DELIGNE, FRESNEL, ZAGIER.

Soit L un réseau de $\mathbb{R}^n$, et $q : L \to \mathbb{Z}$ une forme quadratique entière sur L. On définit comme en [2] le symbole de Legendre $(\frac{c}{d})$, le triplet $(\frac{n}{2}, N, (\frac{\Delta}{\cdot}))$, où N est le niveau de q et Δ son discriminant.

Soit H le demi-plan supérieur. Une application $f : H \to \mathbb{C}$ est dite modulaire, de poids $\frac{k}{2}$ $(k \in \mathbb{N})$, de niveau N, de caractère $(\frac{\Delta}{\cdot})$ si

(a) Pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, $c \equiv 0 \pmod{N}$,

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \left(\frac{\Delta}{d}\right) v(\gamma)(c\tau + d)^{k/2} f(\tau) , \qquad \tau \in H.$$

où $v(\gamma) = 1$ si k est pair, $v(\gamma) = (\frac{c}{d})(\frac{-4}{d})^{-n/2}$ si k est impair.

(b) La limite de $f(\frac{a\tau + b}{c\tau + d})(c\tau + d)^{-n/2}$ est finie quand τ tend vers l'infini, pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

Remarquer que f <u>n'est pas supposée holomorphe</u>.

On note P_λ l'ensemble des fonctions $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, vérifiant

1° $f(X) = p(X) \exp(-2\pi q(X))$, $D(X) f(X)$, $R(X) f(X)$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout polynôme de dérivation $D(X)$ et tout polynôme $R(X)$ de degrés inférieurs ou égaux à 2.

2° $p(X)$ est solution de l'équation différentielle

$$(E - \lambda)\, p(X) = \frac{\Delta}{4\pi} p(X)$$

où $E = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ est l'opérateur d'Euler et $\Delta = \sum_{i=1}^a \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{i=a+1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ est le laplacien de $q(X)$, et où $(x_1 \ldots x_n)$ sont les composantes de X sur une base de $\mathbb{R}^n$ telle que $q(X) = \frac{1}{2}[\sum_{i=1}^a x_i^2 - \sum_{i=a+1}^n x_i^2]$.

THÉORÈME. - <u>Soit</u> $q(X) : L \to \mathbb{Z}$ <u>une forme quadratique entière sur un réseau</u> $L \subset \mathbb{R}^n$ <u>de triplet</u> $(\frac{n}{2}, N, (\frac{\Delta}{\cdot}))$; <u>pour tout</u> $p(X) \in P_\lambda$, <u>les séries thêta</u>

(1) $\theta(\tau) = \sum_{X\in L} v^{-\lambda/2}\, p(X\sqrt{v})\, \exp(2i\pi\tau q(X))$, $\tau = u + iv$, $v > 0$

sont des formes modulaires (non holomorphes) de poids $\lambda + (n/2)$, de niveau N , de caractère $(\frac{\Delta}{\cdot})$.

Démonstration. - Le théorème admet une démonstration élémentaire [1]. Nous allons indiquer une autre démonstration, reposant sur la représentation de Weil [3].

Pour $f(X) \in L^2(\underset{\sim}{R}^n)$, les relations suivantes définissent une représentation projective r de $SL_2(\underset{\sim}{R})$ dans $L^2(\underset{\sim}{R}^n)$

$$r\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix} f(X) = |\lambda|^{n/2} f(\lambda X) ,$$

$$r\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} f(X) = \exp(2i\pi q(X))\, f(X) ,$$

$$r\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} f(X) = \hat{f}(X) = \int_{\underset{\sim}{R}^n} f(X) \exp(-2i\pi\langle X , Y\rangle)\, dY .$$

On note $\langle X , Y\rangle = q(X + Y) - q(X) - q(Y)$ la forme bilinéaire de q .

En utilisant la décomposition de $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in SL_2(\underset{\sim}{R})$ en

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{cases}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a^{-1}b\\ 0 & 1\end{pmatrix} & , \text{ si } c = 0\\[2mm] \begin{pmatrix}1 & ac^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c^{-1} & 0\\ 0 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & c^{-1}d\\ 0 & 1\end{pmatrix} & , \text{ si } c \neq 0\end{cases}$$

on obtient la formule générale :

$$r\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} f(X) = \begin{cases}|a|^{n/2} \exp(2i\pi ab q(X))\, f(aX) & , \text{ si } c = 0\\[2mm] |c|^{-n/2} \int_{\underset{\sim}{R}^n} f(X) \exp(2i\pi c^{-1}[aq(X) - \langle X , Y\rangle + dq(Y)])\, dY & , \text{ si } c \neq 0\end{cases}$$

(remarquer l'égalité $f(-X) = r\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} f(X)$). Pour $\sigma , \tau \in SL_2(\underset{\sim}{R})$, on détermine un cocycle $c(\sigma , \tau)$ par $r(\sigma\tau) = c(\sigma , \tau)\, r(\sigma)\, r(\tau)$. On peut le calculer en faisant agir $SL_2(\underset{\sim}{R})$ sur une fonction particulière.

On plonge le demi-plan supérieur H dans $SL_2(\underset{\sim}{R})$ en posant, pour $\tau \in H$,

$$\sigma_\tau = \begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{v} & 0\\ 0 & \sqrt{v}^{-1}\end{pmatrix}$$

et si on pose $F(X , \tau) = v^{-k/4}\, r(\sigma_\tau)\, f(X)$, on a

$$\vartheta(\tau) = \sum_{X\in L} F(X , \tau) .$$

Les calculs classiques des séries thêta [1] montrent que le théorème est une conséquence de

(2) $\hat{F}(X , \tau) = (-i)^{(q-p)/2}\, \tau^{-k/2}\, F(X , -1/\tau)$, $k = \lambda + (p/2)$

qui s'écrit à l'aide de la représentation de Weil,

(3) $r(t)\, r(\sigma_\tau)\, f(X) = (-i)^{(q-p)/2} \left(\frac{\tau}{|\tau|}\right)^{-k/2} r(\sigma_{-1/\tau})\, f(X)$ avec $t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Quoique r soit une représentation projective, cette relation se transforme comme si r était non projective :

(4) $$r(\sigma_{-1/\tau}^{-1}\, t\sigma_\tau)\, f(X) = (-i)^{(q-p)/2} \left(\frac{\tau}{|\tau|}\right)^{-k/2} f(X) ,$$

car les facteurs $c(\sigma , \tau)$ qu'il serait a priori nécessaire d'introduire, sont en fait tous égaux à 1. La matrice $\sigma_{-1/\tau}^{-1}\, t\sigma_\tau$ appartient au groupe des rotations; en posant $\tau = |\tau|\, e^{-i\theta}$, on vérifie que

$$\sigma_{-1/\tau}^{-1}\, t\, \sigma_\tau = k(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

et la relation (2) est équivalente à

(5) $$r(k(\theta))\, f = (-i)^{(q-p)/2} \exp(ki\theta/2)\, f .$$

L'égalité (5) et celle obtenue en la dérivant par rapport à θ, prises au point $\theta = -\pi/2$ sont équivalentes à

(6) $$(\Delta - 8\pi^2 q(X))\, f(X) = -2\pi k f(X)$$

qui donne, par changement de variables, $f(X) = P(X) \exp(-2\pi q(X))$,

(7) $$(E - \lambda)\, P(X) = \frac{\Delta}{4\pi} P(X) .$$

Remarque. - Ce théorème se généralise pour construire des formes modulaires de Hilbert ou de Siegel.

BIBLIOGRAPHIE

On se reportera à la bibliographie parue dans :

[1] VIGNÉRAS (M.-F.). - Séries théta des formes quadratiques indéfinies, Lecture Note Anvers n° 5 (à paraître).

[2] VIGNÉRAS (M.-F.). - Méthodes analytiques, "Conférences sur les formes quadratiques" [1976. Kingston].

[3] WEIL (A.). - Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, Acta Math., Uppsala, t. 111, 1964, p. 143-211.

(Texte reçu le 6 décembre 1976)

Marie-France VIGNÉRAS
Mathématiques, Bâtiment 425
Université de Paris-Sud
Campus universitaire
91405 ORSAY