

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

GEORGES PHILIBERT

## Évaluations asymptotiques concernant des fonctions multiplicatives définies sur certains semi-groupes

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 17, n° 1 (1975-1976),  
exp. n° 16, p. 1-2

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1975-1976\\_\\_17\\_1\\_A15\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_1_A15_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

26 janvier 1976

ÉVALUATIONS ASYMPTOTIQUES CONCERNANT DES FONCTIONS MULTIPLICATIVES  
DÉFINIES SUR CERTAINS SEMI-GROUPES

par Georges PHILIBERT

Ce travail a été entièrement publié (voir [5]). Nous nous contenterons donc ici de le présenter brièvement, et de donner une bibliographie.

Un certain nombre de questions relatives à des entiers ayant certaines propriétés conduisent à l'évaluation asymptotique de la somme des valeurs prises par une fonction multiplicative définie sur  $\mathbb{N}$ . Au cours de plusieurs travaux ([7], [8], [9]), E. WIRSING a évalué de telles sommes ; il a étendu ainsi certains résultats de H. DELANGE ([1]). Par ailleurs, P. REMOND a été amené à effectuer des évaluations asymptotiques dans des  $S_1$ -semi-groupes [6].

Notre travail consiste en l'étude des propriétés asymptotiques relatives à une fonction multiplicative définie sur un  $S_1$ -semi-groupe. Nous obtenons, entre autres, un théorème d'équirépartition asymptotique et une formule qui donne une évaluation asymptotique de la somme des valeurs prises par une fonction multiplicative définie sur un  $S_1$ -semi-groupe ; cette formule est analogue à la formule correspondante de E. WIRSING et, comme le montre un contre-exemple, les hypothèses sous lesquelles nous l'avons établie sont telles que son domaine de validité est assez bien délimité.

Le fait d'avoir pris pour support dans nos évaluations un  $S_1$ -semi-groupe appelle plusieurs remarques. Tout d'abord, cela n'a pas modifié la difficulté de ces évaluations, ce qui montre bien que, dans  $\mathbb{N}$ , ces problèmes sont liés à sa structure de  $S_1$ -semi-groupe. Notons que, dans [2], les résultats obtenus par E. WIRSING dans  $\mathbb{N}$  mettent en jeu, outre la structure de  $S_1$ -semi-groupe, d'autres propriétés de  $\mathbb{N}$ . D'autre part, considérer des semi-groupes est une façon plus claire de considérer un système d'entiers généralisés (système de nombres de Beurling).

La démarche que nous avons faite tout au long de ce travail est toujours la suivante : connaissant une évaluation symbolique de la somme des valeurs prises sur un ensemble  $E$  d'éléments premiers par une fonction multiplicative, nous nous sommes intéressés à la somme des valeurs prises par cette fonction sur  $(E)$ , le semi-groupe engendré. Il semble qu'il serait intéressant d'envisager le problème dans l'autre sens : connaissant des propriétés de la somme des valeurs prises par la fonction sur  $(E)$ , que peut-on dire de la somme des valeurs prises sur  $E$  l'ensemble des éléments premiers ?

- [1] DELANGE (H.). - Sur la distribution des entiers ayant certaines propriétés, Annales scient. Ec. Norm. Sup., série 3, t. 73, 1956, p. 15-74.
- [2] PHILIBERT (G.). - Une formule fondamentale sur des fonctions multiplicatives définies sur certains semi-groupes et son application à un théorème d'équité-répartition asymptotique, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 274, 1974, série A, p. 1764-1767.
- [3] PHILIBERT (G.). - Généralisation de la formule de E. Wirsing concernant les fonctions multiplicatives positives, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 279, 1974, série A, p. 391-393.
- [4] PHILIBERT (G.). - Applications d'un théorème généralisant la formule de E. Wirsing concernant les fonctions multiplicatives positives, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 281, 1975, série A, p. 59-61.
- [5] PHILIBERT (G.). - Evaluations asymptotiques concernant des fonctions multiplicatives définies sur certains semi-groupes. - St-Etienne, Département de Mathématiques, 1975 (Université de Saint-Etienne. Prépublications, 2).
- [6] REMOND (P.). - Etude asymptotique de certaines partitions dans certains semi-groupes, Annales scient. Ec. Norm. Sup., série 3, t. 83, 1966, p. 343-410 (Thèse Sc. math. Paris, 1967).
- [7] WIRSING (E.). - Über die Zahlen, deren Primteiler einer gegebenen Menge angehören, Archiv der Math., t. 7, 1956, p. 263-272.
- [8] WIRSING (E.). - Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen, Math. Annalen, t. 143, 1961, p. 75-102.
- [9] WIRSING (E.). - Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen, II, Acta Math. Acad. scient. Hungar., t. 18, 1967, p. 411-467.

(Texte reçu le 4 octobre 1976)

Georges PHILIBERT  
Département de Mathématiques  
UER de Sciences  
23 rue Paul Michelon  
42100 SAINT ETIENNE

---