Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Jean Fresnel

Sur la transformation de Fourier p-adique

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, nº 1 (1973-1974), exp. nº 8, p. 1-2

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_1_A6_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
15e année, 1973/74, n° 8, 2 p.

17 décembre 1973

SUR LA TRANSFORMATION DE FOURIER p-ADIQUE

par Jean FRESNEL

Soit p un nombre premier, $\mathbb{Q}_p$ le corps p-adique élémentaire, K une extension valuée complète de $\mathbb{Q}_p$ contenant le groupe Γ de toutes les racines de l'unité d'ordre une puissance de p.

Soit $\mathbb{Z}_p$ le groupe additif des entiers p-adiques. Le groupe des homomorphismes continus de $\mathbb{Z}_p$ dans K^*, d'ordre fini, s'identifie au groupe Γ de la façon suivante : si $\gamma \in \Gamma$ l'homomorphisme correspondant est l'application $x \longrightarrow \gamma^x$.

On appelle $L^1(\Gamma)$ l'algèbre des fonctions définies sur Γ, à valeurs dans K, et tendant vers 0 selon le filtre des complémentaires des parties finies de Γ. On définit alors une transformation de Fourier p-adique F de $L^1(\Gamma)$ dans l'algèbre $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ des fonctions continues de $\mathbb{Z}_p$ dans K : si $f \in L^1(\Gamma)$, $\hat{f} = F(f)$ où :

$$\hat{f}(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)\, \gamma^x .$$

Nous démontrons que cette transformation de Fourier p-adique est <u>non injective</u> mais <u>surjective</u>.

Nous précisons la non-injectivité de la transformation de Fourier p-adique en considérant le problème suivant : soit L une extension valuée complète de $\mathbb{Q}_p$, soit f une fonction définie sur Γ à valeur dans L et tendant vers 0 selon le filtre des complémentaires des parties finies de Γ. Alors, pour quels corps L, l'égalité

$$0 = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)\, \gamma^x \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{Z}_p$$

implique $f = 0$?

Nous démontrons qu'il en est ainsi pour les corps L valués complets dont l'indice de ramification sauvage sur $\mathbb{Q}_p$ est fini.

Enfin nous étendons l'étude de la surjectivité de la transformation de Fourier p-adique relative à $\mathbb{Z}_p$ à celle relative à tout groupe abélien compact totalement discontinu.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

AMICE (Yvette). - Dual d'un espace $H(D)$ et transformation de Fourier. Groupe de travail d'analyse ultramétrique, 1973/74, n° 5, 12 p.

AMICE (Yvette) et ESCASSUT (Alain). - Sur la non injectivité de la transformation de Fourier p-adique, C. R. Acad. Sc., t. 278, 1974, Série A, p. 583-586.

FRESNEL (J.) et de MATHAN (B.). - Sur la transformation de Fourier p-adique, C. R. Acad. Sc., t. 277, 1973, Série A, p. 711-714.

FRESNEL (J.) et de MATHAN (B.). - L'image de la transformation de Fourier p-adique, C. R. Acad. Sc., t. 278, 1974, Série A, p. 653-656.

FRESNEL (J.) et de MATHAN (B.). - Sur la transformation de Fourier p-adique, Séminaire de Théorie des nombres de Bordeaux, année 1972/73, exposé n° 21.

GUERRAOUI (M.). - Sur la dualité p-adique entre groupes compacts et groupes discrets. Thèse de spécialité, Bordeaux 1971.

GUERRAOUI (M.). - Sur la dualité p-adique. C. R. Acad. Sc., t. 275, 1972, Série A, p. 1281-1284.

GUERRAOUI (M.) et de MATHAN (B.). - Dualité et transformation de Fourier p-adiques, Séminaire de Théorie des nombres de Bordeaux, année 1971/72, exposé n° 3.

GUERRAOUI (M.) et de MATHAN (B.). - Groupes p-réflexifs et transformation de Fourier p-adiques, C. R. Acad. Sc., t. 276, 1973, Série A, p. 423-426.

SCHIKHOF (W. H.). - Non archimedean harmonic analysis. Thèse Nijmegen, 1967.

WOODCOCK (C. F.). - Fourier analysis for p-adic Lipschitz functions, J. of London math. Soc., t. 7, 1974, p. 681-693.

(Résumé reçu le 1er octobre 1974)

Jean FRESNEL
Université de Bordeaux-I
Mathématiques
351 cours de la Libération
33405 TALENCE