Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

MICHEL MENDÈS FRANCE

Les ensembles de Bésineau

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, nº 1 (1973-1974), exp. nº 7, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_1_A5_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
15e année, 1973/74, n° 7, 6 p.

10 décembre 1973

LES ENSEMBLES DE BÉSINEAU

par Michel MENDÈS FRANCE

1. Deux problèmes ouverts.

Soit $\theta > 1$ un nombre réel donné. On dit que le nombre réel x est normal pour la base θ si la suite $(x\theta^n)$ est équirépartie modulo 1 . Notons par $B(\theta)$ l'ensemble des nombres normaux pour la base θ . Le résultat suivant est bien connu, quoique non trivial : Si $\theta \geqslant 2$ est un entier rationnel et si $x \in B(\theta)$, alors, pour tout nombre rationnel $\alpha \neq 0$, $\alpha x \in B(\theta)$ (voir [8], ou le paragraphe 5 de cet exposé).

Une des étapes de la démonstration consiste à montrer cette autre propriété : Soient $\theta' \geqslant 2$ et $\theta'' \geqslant 2$ deux nombres entiers. Alors

$$B(\theta') = B(\theta'') \Longleftrightarrow \frac{\log \theta'}{\log \theta''} \in \mathbb{Q}$$

(voir [11], par exemple).

Les deux propriétés précédentes suggèrent les problèmes suivants :

PROBLÈME 1. - $\theta > 1$ étant un nombre réel donné, est-il vrai que, pour tout nombre rationnel $\alpha \neq 0$, on ait

$$x \in B(\theta) \Rightarrow \alpha x \in B(\theta) \ ?$$

PROBLÈME 2. - $\theta' > 1$ et $\theta'' > 1$ étant deux nombres réels donnés, est-il vrai que

$$B(\theta') = B(\theta'') \Longleftrightarrow \frac{\log \theta'}{\log \theta''} \in \mathbb{Q} \ ?$$

A ma connaissance, nulle réponse n'a été donnée ni au premier ni au second problème. Une conjecture (gratuite au sens d'ERDÖS) est que la réponse à l'un et à l'autre des problèmes est affirmative, à condition d'imposer aux nombres θ , θ' et θ'' d'être des nombres de Pisot-Vijayaraghavan. Le problème 2 a été étudié dans un cadre assez différent (automorphismes de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^k$) par différents auteurs, entre autres C. BATUT [1], J. W. S. CASSELS [3], J. CIGLER [4], W. SCHMIDT [11], [12] et K. SIGMUND [13], [14].

Une version affaiblie du problème 2 est la suivante : Est-il vrai que

$$(x\theta^n) \text{ équirépartie } (\mathrm{mod}\ 1) \Longleftrightarrow \forall\, a \in \mathbb{N} ,\ \forall\, b \in \mathbb{N} ,\ (x\theta^{an+b})$$

est équirépartie (mod 1) ?

L'étude de cette question nous amène très naturellement à caractériser les suites $u = (u_n)$ qui sont telles que, pour tout entier $a \geqslant 1$ et tout entier $b \geqslant 0$, la suite (u_{an+b}) est équirépartie modulo 1 . Tel est l'objet essentiel de cet exposé.

2. Les espaces de Marcinkiewicz et de Besicovitch.

L'étude qui suit est un pot pourri des principaux résultats obtenus par J. BÉSINEAU [2] d'une part, et par H. DABOUSSI et M. MENDÈS FRANCE [5] d'autre part.

Soit $\mathcal{E}$ l'espace des suites $f = (f_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\|f\| = \limsup_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f_n| < \infty \ , \tag{1}$$

et soit $\mathcal{M}$ l'espace quotient de $\mathcal{E}$ par l'ensemble des suites f vérifiant $\|f\| = 0$. La relation (1) induit sur $\mathcal{M}$ une norme qui fait de $\mathcal{M}$ un espace de Banach, connu sous le nom d'espace de Marcinkiewicz. Dans la suite, on identifiera tout élément de $\mathcal{E}$ à sa classe dans $\mathcal{M}$.

Voyons quelques exemples de sous-espaces fermés. Un polynôme trigonométrique p est une combinaison finie d'exponentielles complexes :

$$n \longmapsto p_n = \sum_\nu c_\nu \, e(-\alpha_\nu n) \ ,$$

où $c_\nu \in \mathbb{C}$, $\alpha_\nu \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $e(x) = \exp 2i\pi x$, et où la somme ne contient qu'un nombre fini de termes. Il est bien clair que $p \in \mathcal{M}$ ($\|p\| \leq \sum_\nu |c_\nu|$). Appelons fréquences de p les nombres α_ν. Soit $A \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On désigne par $\mathcal{B}(A)$ l'adhérence dans $\mathcal{M}$ de l'ensemble des polynômes trigonométriques à fréquences dans A. $\mathcal{B}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ n'est autre que l'ensemble des suites presque-périodiques au sens de Besicovitch, et $\mathcal{B}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \supset \mathcal{B}(A)$.

Soit $s = (s_n)$ une suite strictement croissante d'entiers positifs. Soit χ_s sa fonction caractéristique :

$$\chi_s(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in s \\ 0 & \text{si } k \notin s . \end{cases}$$

On dit que s est une A-suite si $\chi_s \in \mathcal{B}(A)$ et si $\|\chi_s\| > 0$. Donnons en quelques exemples :

(i) $s = (an + b)$, $a \geq 1$, $b \geq 0$ entiers ; $A = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$;

(ii) $s = ([\alpha n])$, $\alpha > 1$ réel ; $A = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$;

(iii) la suite des entiers quadratfrei.

3. Le spectre d'une suite et les ensembles de Bésineau.

Soit $u = (u_n)$ une suite infinie de nombres réels réduits modulo 1. On appelle spectre de u, noté $\mathrm{sp}(u)$, l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tels que la suite $(u_n - n\alpha)$ ne soit pas équirépartie modulo 1.

Si A est un sous-ensemble du tore, on désignera son complémentaire par $\bar{A}$. Un sous-ensemble S du tore est appelé ensemble de Bésineau si les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{sp}(u) \subset S$;

(ii) pour toute $\bar{S}$-suite s, la suite $u \circ s = (u_{s_n})$ est équirépartie modulo 1.

L'ensemble vide $\emptyset$ est un ensemble de Bésineau [10] et de même $(\widehat{\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}})^{\sim}$ [2], [10], de sorte qu'en particulier

$sp(u) \cap (\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}) = \emptyset \Longleftrightarrow$ pour toute $(\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z})$-suite s, la suite $u \circ s$ est équirépartie (mod 1).

Or $\mathcal{B}(\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z})$ n'est autre que l'ensemble des fonctions limite-périodiques, d'où on déduit le théorème suivant.

THÉORÈME. - Une condition nécessaire et suffisante pour que les suites (u_{an+b}) soient équiréparties modulo 1, pour tous entiers $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 0$, est que

$$sp(u) \cap (\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}) = \emptyset .$$

Ce résultat répond de façon très précise au problème posé à la fin du premier paragraphe. Bien entendu cela ne résout pas les problèmes 1 et 2. Tout au plus, il permet de reposer le problème 2 (ou plutôt sa version affaiblie) sous la forme équivalente : Est-il vrai que

$$sp((x\theta^n)) \not\ni 0 \Longleftrightarrow sp((x\theta^n)) \cap (\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}) = \emptyset \ ?$$

(l'implication de la droite vers la gauche est triviale).

4. Appendice 1 : Les suites additives.

On rappelle qu'une suite $u = (u_n)$ est dite additive si

$$u_{mn} = u_m + u_n$$

sitôt que $(m, n) = 1$. Faisant usage de certains résultats de DELANGE [6], [7], on peut montrer que si u est additif, alors

$$sp(u) \cap (\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}) = \emptyset \Longleftrightarrow u \text{ est équirépartie (mod 1)} .$$

D'après ce qui précède, on en déduit donc que si u est une suite additive équirépartie modulo 1, alors toutes ses sous-suites $u \circ s$, où s est une $(\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z})$-suite, sont équiréparties modulo 1. Ce résultats est à comparer avec le théorème 2 de DELANGE [7].

5. Appendice 2 : Une démonstration.

Dans ce paragraphe, nous reproduisons une démonstration, due à J. E. MAXFIELD [8], du résultat suivant : Soit $\theta \geqslant 2$ un entier, et soit α un nombre rationnel non nul. Alors $x \in B(\theta) \Longrightarrow \alpha x \in B(\theta)$.

D'une façon générale, si la suite (u_n) est équirépartie modulo 1, alors, $k \neq 0$ étant un entier arbitraire, la suite (ku_n) est équirépartie modulo 1. Il suffit donc de supposer que $\alpha = 1/q$, où $q \in \underset{\sim}{N}$. Le cas où q est une puissance de θ est aussi trivial. Compte tenu de ces remarques, on pourra donc supposer que $\alpha = \frac{1}{q}$, où $(q, \theta) = 1$.

Soit alors $x \in B(\theta)$. La suite $(x\theta^n)$ est donc équirépartie modulo 1 et, par suite, pour tout entier $a \geqslant 1$, $(x\theta^{an})$ est équirépartie modulo 1 (cela découle de la seconde propriété énoncée au premier paragraphe). Soit s un entier ≥ 1 arbitraire. Le nombre $(\theta^{as} - 1)(\theta^{a} - 1)^{-1}$ est entier, non nul donc

$$(x \frac{\theta^{as} - 1}{\theta^{a} - 1} \theta^{an})$$

est équirépartie modulo 1 . En d'autres termes, pour tout entier $s \geq 1$, la suite

$$(\frac{x}{\theta^{a} - 1} \theta^{a(n+s)} - \frac{x}{\theta^{a} - 1} \theta^{an})$$

est équirépartie modulo 1 . Le théorème de Van der Corput implique alors l'équirépartition modulo 1 de la suite

$$(\frac{x}{\theta^{a} - 1} \theta^{an})$$

donc celle de

$$(\frac{x}{\theta^{a} - 1} \theta^{n}) .$$

Enfin, choisissant $a = \varphi(q)$ (indicatrice d'Euler), on conclut à l'équirépartition de la suite $(\frac{x}{q} \theta^{n})$.

C. Q. F. D.

6. Exercices et problèmes ouverts.

(Un astérisque (*) signifie que le problème est ouvert.)

1. Montrer que, pour presque tout $\theta > 1$, on a

$$\forall\, x \in B(\theta) , \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} , \qquad \alpha x \in B(\theta) .$$

2. Soit $\theta \geq 2$ un nombre entier. Montrer que

$$\forall\, x \in B(\theta) , \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{Q} , \qquad x + \alpha \in B(\theta) .$$

3*. Soit $\theta \geq 2$ un nombre entier. Etudier l'ensemble $\underset{\sim}{A}$ des nombres réels tels que

$$\forall\, x \in B(\theta) , \quad \forall\, \alpha \in \underset{\sim}{A} , \qquad x + \alpha \in B(\theta) ..$$

(On pourra consulter à ce propos l'article de J. E. MAXFIELD et J. L. SPEARS [9]).

4*. Soit $\theta > 1$ un nombre algébrique et $\mathbb{Q}(\theta)$ le corps engendré par θ . Est-il vrai que

$$x \in B(\theta) , \quad \alpha \in \mathbb{Q}(\theta) \setminus \{0\} \Rightarrow \alpha x \in B(\theta) \ ?$$

Si la réponse est positive, et si $\theta > 2$ est un nombre de Pisot-Vijayaraghavan, alors l'ensemble de Cantor $C(\theta)$, construit sur $[0 , 1]$, à dissection θ^{-1} , est disjoint de $B(\theta)$.

5. Montrer que, pour toute suite $u = (u_n)$, l'ensemble $sp(u)$ est de mesure nulle, et même de dimension de Hausdorff nulle (voir H. WALLIN [15]). Montrer que $sp(u)$ peut être non dénombrable.

6*. Est-il vrai que $sp((x\theta^n))$ $(x \neq 0 , \theta > 1)$ est au plus dénombrable ?

7. Soit $u = (u_n)$ une suite g-additive, c'est-à-dire vérifiant la condition suivante :

$$u_{ag^r+b} = u_{ag^r} + u_b$$

pour tous entiers a , b , r tels que $a \geqslant 0$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant b \leqslant g^r - 1$.

Montrer que, ou bien $sp(u) = \emptyset$, ou bien il existe $\alpha \in \underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$ pour lequel

$$sp(u) = \alpha + (\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z})$$

(voir [5]).

8*. Etudier $sp(u)$ quand u est une fonction multiplicative.

9. Montrer que, pour presque tout u , $sp(u) = \emptyset$.

10. Soit $u = (u_n)$ l'une des suites, définie par $u_n = \sqrt{2}\, n^2$, $u_n = (\log n)^2$, $u_n = \sqrt{n}$, $u_n = n \log n$. Montrer que $sp(u) = \emptyset$.

11. La suite $u = (u_n)$ étant donnée, on note par $B(u)$ l'ensemble des x tels que $xu = (xu_n)$ est équirépartie modulo 1 . Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des $(\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})$-suites, c'est-à-dire l'ensemble des suites croissantes d'entiers, dont les fonctions caractéristiques sont presque-périodiques. Etablir l'égalité

$$\bigcap_{\alpha \in \underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}} B(u - \alpha \underset{\sim}{N}) = \bigcap_{s \in \mathcal{C}} B(u \circ s) ,$$

(voir [5]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BATUT (C.). - Séminaire (mod 1) , Université de Bordeaux (non rédigé).

[2] BÉSINEAU (J.). - Presque-périodicité et sous-suites, C. R. Acad. Sc. Paris (à paraître).

[3] CASSELS (J. W. S.). - On a problem of Steinhaus about normal numbers, Colloq. Math., Wroclaw, t. 7, 1959, p. 95-101.

[4] CIGLER (J.). - Ein gruppentheoritisches Analogon zum Begriff der normalen Zahl, J. für reine und angew. Math., t. 206, 1961, p. 5-8.

[5] DABOUSSI (H.) and MENDÈS FRANCE (M.). - Spectrum, almost-periodicity and equidistribution modulo 1 , Periodica Mathematica Hungarica (à paraître).

[6] DELANGE (H.). - On the distribution modulo 1 of additive functions, J. of Indian math. Soc., t. 34, 1970, p. 215-235.

[7] DELANGE (H.). - Sur la distribution des valeurs des fonctions additives, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275, 1972, Série A, p. 1139-1142.

[8] MAXFIELD (J. E.). - Normal k-tuples, Pacific J. of Math., t. 3, 1953, p. 189-196.

[9] MAXFIELD (J. E.) and SPEARS (J. L.). - Further examples of normal numbers, Publ. Math, Debrecen, t. 16, 1969, p. 119-127.

[10] MENDÈS FRANCE (M.). - Les suites à spectre vide et la répartition modulo 1 , J. of number theory, t. 5, 1973, p. 1-15.

[11] SCHMIDT (W.). - On normal numbers, Pacific J. of Math., t. 10, 1960, p. 661-672.

[12] SCHMIDT (W.). - Normalität bezüglich Matrizen, J. für reine und angew. Math., t. 214/215, 1964, p. 227-260.

[13] SIGMUND (K.). - Normal and quasiregular points for automorphisms of the torns. (à paraître).

[14] SIGMUND (K.). - Nombres normaux et théorie ergodique, Journées ergodiques [1972, Rennes] (à paraître).

[15] WALLIN (H.). - On Bohr's spectrum of a function, Arkiv för Math., t. 4, 1961, p. 159-162.

Michel MENDÈS FRANCE
Université de Bordeaux-I
Mathématiques
351 cours de la Libération
33405 TALENCE