Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres

Gilles Christol

Éléments analytiques uniformes et multiformes

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, nº 1 (1973-1974), exp. nº 6, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_1_A4_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres (Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
15e année, 1973/74, n° 6, 18 p.

3 décembre 1973

ÉLÉMENTS ANALYTIQUES UNIFORMES ET MULTIFORMES

par Gilles CHRISTOL

0. Notations.

p est un nombre premier fixé. $\mathbb{C}_p$ désignera le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, $\mathfrak{A}$ les entiers de $\mathbb{C}_p$, $\overline{\mathbb{F}}_p$ le corps des restes de $\mathfrak{A}$ (qui est une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$) et $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal de $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}$ est muni de la valuation telle que $v(p) = 1$.

Si $a \in \mathfrak{A}$, nous noterons $\overline{a}$ son image dans $\overline{\mathbb{F}}_p$, ω désignera l'homomorphisme multiplicatif injectif de $\overline{\mathbb{F}}_p^*$ dans $\mathfrak{A}$, qui vérifie, pour tout α de $\overline{\mathbb{F}}_p^*$, $\overline{\omega(\alpha)} = \alpha$. Un élément de $\mathfrak{A}^*$ s'écrit alors, de manière unique, $a = \omega(\overline{a})\langle a\rangle$, où $\langle a\rangle \in 1 + \mathfrak{M}$.

Nous munirons $\mathbb{N}$ du filtre des parties formées des multiples non nuls d'un élément et noterons la convergence associée $h \to \infty$. Si $\mathbb{F}(h)$ désigne le corps à p^h éléments, il est clair que $\overline{\mathbb{F}}_p = \bigcup_{h\to\infty} \mathbb{F}(h)$.

A étant un anneau valué, nous noterons $\mathfrak{F}_r(A)$ l'ensemble des applications de $\mathbb{N}^r$ dans A, muni de la topologie de la convergence uniforme, et nous noterons, pour $f \in \mathfrak{F}_r(A)$,

$$v(f) = \inf_{(n_1,\dots,n_r)}[v[f\langle n_1, \dots, n_r\rangle]]$$

d'autre part nous utiliserons la notation

$$f(x_1, \dots, x_r) = \sum_{\mathbb{N}^r} f\langle n_1, \dots, n_r\rangle\, x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r},$$

cette série est convergente sur $\mathfrak{M}^r$; en particulier si $A = \mathfrak{A}$ et si $r = 1$, on sait que

$$v(f) = \inf_{x\in\mathfrak{M}} v[f(x)].$$

$\mathfrak{F}_r(A)$ sera muni du produit qui provient de son identification à l'anneau des séries formelles $A[[x_1, \dots, x_r]]$, et $\mathfrak{F}_1(A)$ sera en outre muni du produit de Hadamard, dans ce cas nous avons donc

$$fg\langle n\rangle = \sum_{m=0}^{n} f\langle m\rangle\, g\langle n-m\rangle \; ; \qquad f * g\langle n\rangle = f\langle n\rangle\, g\langle n\rangle,$$

Nous allons étudier deux sous-ensembles de $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{A})$, mais il est clair que tous les résultats se généralisent immédiatement au cas des applications bornées de $\mathfrak{F}_1(\mathbb{C}_p)$.

0.1: Sous-anneaux de $\mathfrak{A}$. - Si A est un sous-anneau de $\mathfrak{A}$, on note $v(A)$ l'ensemble des valuations de ses éléments, en particulier, $v(\mathfrak{A}) = \mathbb{Q}^+$.

On dira que A est séparable si $v(A)$ est formé d'une suite tendant vers l'in-

fini. Il n'est pas difficile de voir que A est séparable si, et seulement si, c'est un espace topologique séparable quand on le munit de la topologie induite de celle de $\mathfrak{A}$.

Nous noterons W l'anneau des vecteurs de Witt de $\overline{\underset{\sim}{F}}_p$, et nous dirons que le sous-anneau B de $\mathfrak{A}$ est <u>saturé</u> si, pour tout a de B , on a $a.W \in B$.

PROPOSITION 1. - <u>Tout sous-anneau</u> A , <u>de</u> $\mathfrak{A}$, <u>est contenu dans un anneau</u> B <u>saturé</u>, <u>tel que</u> $v(B) = v(A)$.

Définissons $B = \{\sum_{\text{finie}} a_i\, b_i \mid a_i \in W \; ; \; b_i \in A\}$. B est un anneau ; il est clair qu'il est saturé et qu'il contient A , il suffit donc de vérifier que $v(A) \supset v(B)$. Nous dirons que $(a_i\, b_i)$ est une représentation de a si $a = \sum a_i b_i$, avec $a_i \in W$, $b_i \in A$, et nous dirons que cette représentation est d'ordre r s'il existe r indices i tels que $v(a_i\, b_i) = \inf_j v(a_j\, b_j)$. Si $a \in B$, parmi toutes les représentations de a il en existe une qui est d'ordre minimum, supposons que ce minimum est au moins 2 , alors, pour cette représentation nous pouvons supposer, par exemple,

$$v(a_1\, b_1) = v(a_2\, b_2) = \inf v(a_i\, b_i) \text{ , et } v(a_1) \geqslant v(a_2) \text{ .}$$

Comme a_1 et a_2 sont dans W , $v(a_1) = v(a_2) + k$, où k est un entier, et $b_2 \in p^k\, b_1\, \mathfrak{A}$. Il existe donc $\alpha \in W$ tel que $b_2/p^k\, b_1 = \alpha \bmod \mathfrak{M}$, ce qui s'écrit $b_2 = p^k\, \alpha b_1 + b_2'$ avec $v(b_2') > v(b_2)$. On a donc

$$a_1\, b_1 + a_2\, b_2 = (a_1 + p^k\, \alpha a_2) b_1 + a_2\, b_2' \text{ avec } v(a_2\, b_2') > v(a_2\, b_2) \text{ .}$$

On trouve donc une représentation de a d'ordre $r - 1$, ce qui contredit notre hypothèse.

Pour tout a de B , il existe donc une représentation d'ordre 1 , ce qui implique $v(a) = \inf v(a_i\, b_i)$. Comme a_i est dans W sa valuation est entière, donc, pour tout a de B , il existe b dans A tel que $v(a) = v(p^k\, b) \subset v(A)$.

Pour tout k , $p^k\, \mathfrak{A} \cap A$ est un idéal de A . Nous dirons que A est <u>profini</u> si, pour tout k , $A/(p^k\, \mathfrak{A} \cap A)$ a un nombre fini d'éléments.

PROPOSITION 2. - <u>Tout sous-anneau de</u> $\mathfrak{A}$, <u>engendré par un nombre fini d'éléments</u>, <u>est profini</u>.

Supposons A engendré par a_1 , ... , a_r . Alors $a_i \in \underset{\sim}{C}_p$ est limite d'éléments algébriques sur $\underset{\sim}{Q}_p$, il existe donc b_i algébrique sur $\underset{\sim}{Q}_p$ tel que $b_i = a_i (\bmod p^k)$. Par suite, $A/(p^k\, \mathfrak{A} \cap A) = B/(p^k\, \mathfrak{A} \cap B)$, où B est l'anneau engendré par les b_i . Or B est contenu dans l'anneau des entiers d'une extension finie de $\underset{\sim}{Q}_p$ (celle qu'engendrent les b_i) et il est bien connu que, modulo p^k , il y a nkp entiers dans une extension de degré n .

PROPOSITION 2 bis. - <u>Si</u> A <u>et</u> B <u>sont profinis</u>, <u>l'anneau engendré par</u> $A \cup B$ <u>est profini</u>.

Si on regarde modulo p^k , A et B sont finis, et $A \cup B$ peut donc être engendré, modulo p^k , par un nombre fini d'éléments, on retrouve la démonstration précédente.

PROPOSITION 3. - Tout anneau profini est séparable.

Comme A ne possède qu'un nombre fini d'éléments modulo p^k , il est clair que les valuations des éléments de A , inférieures à k , sont en nombre fini, donc ces valuations forment bien une suite qui tend vers l'infini.

1. Eléments analytiques uniformes.

1.1: Nous appellerons "fractions rationnelles" les éléments f de $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{A})$ qui sont des fractions rationnelles sur $\underset{\sim}{C}_p$. f , étant alors analytique sur $\mathfrak{M}$, n'a pas de pôle dans $\mathfrak{M}$.

L'ensemble EAU (éléments analytiques uniformes) est la fermeture dans $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{A})$ de l'ensemble des fractions rationnelles. On dira qu'un élément de EAU est prolongeable dans un ensemble $\mathfrak{S}$ qui contient $\mathfrak{M}$ s'il existe une suite f_n de fractions rationnelles telles que :

- les f_n n'ont pas de pôles dans $\mathfrak{S}$,
- $f(x)$ est limite uniforme sur $\mathfrak{S}$ de $f_n(x)$.

Remarque. - Si x appartient à $\mathfrak{S} - \mathfrak{M}$, la deuxième condition est à considérer comme la définition de la valeur de f au point x .

Exemple. - Il est facile de constater que f est prolongeable dans $\mathfrak{A}$ si, et seulement si, $f\langle n\rangle \to 0$ quand $n \to \infty$.

On pourra considérer des ensembles $\mathfrak{S}$ contenant l'infini, et par suite parler de la valeur de f à l'infini.

THÉORÈME 4.(MITTAG-LEFFLER). - Un élément analytique uniforme se décompose de manière unique dans EAU sous la forme

$$f = \sum_{\alpha \in \overline{\underset{\sim}{F}}_p} f_\alpha$$

avec :

- $v(f_\alpha) \to \infty$ sur le filtre du complémentaire des parties finies de $\underset{\sim}{F}_p$ (nous noterons dans ce cas $\alpha \to \infty$),
- f_α pour $\alpha \neq 0$ est prolongeable dans le complémentaire de $\omega(\alpha) + \mathfrak{M}$ et nulle à l'infini,
- f_0 est prolongeable dans $\mathfrak{A}$.

On trouvera une démonstration de ce résultat, par exemple, dans [11]. On sait de plus que $v(f) = \inf v(f_\alpha)$.

THÉORÈME 5 (AMICE). - Un élément f de EAU est prolongeable dans le complémentaire de $1 + \mathfrak{M}$ et nul à l'infini si, et seulement si, $f\langle n\rangle$ est uniformément continu de $\underset{\sim}{N}$ (muni de la topologie p-adique) dans $\mathfrak{A}$.

Ce résultat est démontré dans [2].

COROLLAIRE 6. - f appartient à EAU si, et seulement si, pour tout α de $\underset{\sim}{F}_p^*$ il existe une fonction $\langle f , \alpha\rangle$ uniformément continue de $\underset{\sim}{N}$ dans $\mathfrak{A}$ telle que :

- $v(\langle f , \alpha\rangle) \to \infty$ si $\alpha \to \infty$,
- $v[f\langle n\rangle - \sum_{\alpha\in\underset{\sim}{F}_p^*} \omega(\alpha)^{-n} \langle f , \alpha\rangle(n)] \to \infty$ si $n \to \infty$.

On remarque que, pour $\alpha \neq 0$, la fonction $\omega(\alpha)^n f_\alpha\langle n\rangle = \langle f , \alpha\rangle(n)$ est prolongeable dans le complémentaire de $1 + \mathfrak{M}$, c'est-à-dire est uniformément continue de $\underset{\sim}{N}$ dans $\mathfrak{A}$, et telle que $v(f_\alpha) = v(\langle f , \alpha\rangle)$ puisque $v[\omega(\alpha)] = 0$, la deuxième relation vient du fait que la quantité considérée n'est autre que $f_0\langle n\rangle$.

Réciproquement, d'après le théorème 5, on voit que

$$f_\alpha\langle n\rangle = \omega(\alpha)^{-n} \langle f , \alpha\rangle(n)$$

est prolongeable dans le complémentaire de $\omega(\alpha) + \mathfrak{M}$ et donc appartient à EAU ; d'autre part, $g = \sum_\alpha f_\alpha$ converge, d'après la première relation, dans $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{A})$, donc dans EAU ; enfin, la deuxième relation montre que $f - g$ est prolongeable dans $\mathfrak{A}$ c'est-à-dire appartient à EAU.

1.2: On appellera fonction presque périodique une application de $\underset{\sim}{N}$ dans $\mathfrak{A}$ (ou plus généralement dans $\underset{\sim}{C}_p$) qui vérifie la condition :

$$\forall N , \exists K(N) \text{ tel que } v(f\langle n + K(N)\rangle - f\langle n\rangle) \geq N , \text{ pour tout } n \geq K(N) .$$

Remarque. - Si $f\langle n\rangle$ est presque périodique et à valeurs dans $\underset{\sim}{C}_p$, il est clair que $f\langle n\rangle$ est borné. Se restreindre à des fonctions à valeurs dans $\mathfrak{A}$ ne limite donc pas la portée des résultats.

THÉORÈME 7. - f appartient à EAU si, et seulement si, $f\langle n\rangle$ est presque périodique.

Supposons $f\langle n\rangle$ presque périodique, et considérons la fraction rationnelle

$$g(x) = \frac{\sum_{n=0}^{K(N)-1} f\langle n + K(N)\rangle x^n}{1 - x^{K(N)}} + \sum_{n=0}^{K(N)-1}(f\langle n\rangle - f\langle n + K(N)\rangle) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{K(N)-1} f\langle n\rangle x^n + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{K(N)-1} f\langle n + K(N)\rangle x^{n+mK(N)} .$$

Il est alors immédiat de vérifier que $v(f - g) \geq N$. En faisant tendre N vers l'infini, on voit que f est limite de fractions rationnelles (sans pôles dans $\mathfrak{M}$), donc appartient à EAU.

La réciproque découlera d'un lemme.

LEMME 8. - Si f appartient à EAU, pour tout N, il existe h tel que, pour tout n et tout $k \geqslant 1$, on ait :

$$v[f\langle n + kp^h\rangle - \sum_{\alpha\in \underset{\sim}{F}(h)^*} \omega(\alpha)^{-n-k} \langle f , \alpha\rangle(n)] \geqslant N ;$$

D'après le corollaire 6, il existe un nombre fini de α tels que $v(\langle f,\alpha\rangle) \geqslant N$, et donc un nombre h_1 tel que, si $\alpha \notin \underset{\sim}{F}(h_1)$, $v(\langle f , \alpha\rangle) \geqslant N$. D'autre part, il existe h_2 tel que, si $n \geqslant h_2$, on ait

$$v[f\langle n\rangle - \sum_{\alpha\in \underset{\sim}{F}_p^*} \omega(\alpha)^{-n} \langle f , \alpha\rangle(n)] \geqslant N$$

c'est-à-dire

$$v[f\langle n\rangle - \sum_{\alpha\in \underset{\sim}{F}(h_1)^*} \omega(\alpha)^{-n} \langle f , \alpha\rangle(n)] \geqslant N .$$

Les fonctions $\langle f , \alpha\rangle$ à considérer sont maintenant en nombre fini, comme elles sont uniformément continues, il existe h_3 tel que, pour tout k et pour tout $\alpha \in \underset{\sim}{F}(h_1)^*$, on ait

$$v[\langle f , \alpha\rangle(n + kp^{h_3}) - \langle f , \alpha\rangle(n)] \geqslant N ;$$

il suffit alors de remarquer que, si h_1 divise h, on a, pour tout α de $\underset{\sim}{F}(h_1)$,

$$\omega(\alpha)^{-p^h} = \omega(\alpha) ,$$

et le lemme est démontré pour h multiple de h_1 (de sorte que $\underset{\sim}{F}(h_1) \subset \underset{\sim}{F}(h)$), et supérieur à h_2 et h_3.

Il suffit alors de prendre $K(N) = (p^h - 1)p^h$ et de vérifier

$$v[f\langle n + 2K(N)\rangle - f\langle n + K(N)\rangle] \geqslant N \quad \text{pour tout } n$$

pour établir que $f\langle n\rangle$ est presque périodique.

On trouvera une autre démonstration de la condition suffisante dans [11].

Remarques. - Il résulte de la démonstration ci-dessus que l'on peut toujours prendre des "périodes" de la forme $p^h(p^h - 1)$, ceci n'est pas étonnant car il est clair que si $h \to \infty$, alors $p^h(p^h - 1) \to \infty$.

D'autre part, on voit que les éléments de EAU sont limites uniformes de fractions rationnelles n'ayant pour pôles (simples) que des racines de l'unité, ceci n'était pas évident à priori.

1.3: Prolongement des éléments analytiques uniformes.

PROPOSITION 9. - Si f appartient à EAU et si $\alpha \neq 0$, on a

$$\langle f , \alpha\rangle(n) = - \lim_{h\to\infty} \sum_{k=1}^{p^h-1} \omega(\alpha)^{n+k} f\langle n + kp^h\rangle ,$$

la limite étant uniforme en n.

D'après le lemme 8, pour tout N, si h est "assez grand multiplicativement", on a

$$v[f\langle n + kp^h\rangle - \sum_{\beta\in\underset{\sim}{F}(h)^*} \omega(\beta)^{-n-k} \langle f , \beta\rangle(n)] \geqslant N .$$

Etant donné α , quitte à multiplier h , nous pouvons toujours supposer que $\alpha \in F(h)^*$. Alors on aura, pour tout $\beta \in \underset{\sim}{F}(h)^*$,

$$\sum_{k=1}^{p^h-1} \omega(\frac{\alpha}{\beta})^k = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ p^h-1 & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

on en déduit

$$\sum_{k=1}^{p^h-1} \omega(\alpha)^{n+k} f\langle n\rangle = \sum_{\beta\in F(h)^*} \sum_{k=1}^{p^h-1} \omega(\frac{\alpha}{\beta})^{n+k} \langle f , \beta\rangle(n) \pmod{p^N}$$
$$= (p^h - 1)\langle f , \alpha\rangle(n) \pmod{p^N} ,$$

et comme nous pouvons toujours supposer que h est supérieur à N , la proposition est démontrée.

THÉORÈME 10. - f , <u>appartenant à EAU, est prolongeable dans</u> $\mathfrak{M} \cup (\omega(\alpha) + \mathfrak{M})$ <u>pour</u> $\alpha \neq 0$ <u>si, et seulement si, pour tout</u> n ,

$$\lim_{h\times\to 0} \sum_{k=1}^{p^h-1} \omega(\alpha)^k f\langle n + kp^h\rangle = 0 .$$

<u>Alors, si</u> a <u>appartient à</u> $\omega(\alpha) + \mathfrak{M}$, <u>on a</u>

$$f(a) = \lim_{h\times\to 0} \sum_{n=0}^{p^{2h}-1} a^m f\langle m\rangle([m/p^h] + 1) ,$$

<u>où</u> [ ] <u>désigne la partie entière.</u>

<u>Enfin</u> f <u>est prolongeable dans</u> $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{A}$ <u>si, et seulement si,</u> $f\langle n\rangle$ $(n = 1 ,\ldots)$ <u>est prolongeable en une application continue de</u> $\hat{\underset{\sim}{Z}} = \mathrm{Gal}(\overline{\underset{\sim}{F}}_p/\underset{\sim}{F}_p)$ <u>dans</u> $\mathfrak{A}$.

La première partie découle immédiatement de la proposition 9 ; en effet, pour que f soit prolongeable en $\mathfrak{M}\cup(\omega(\alpha) + \mathfrak{M})$ d'après le théorème 4, il faut et il suffit que $\langle f , \alpha\rangle$ soit nulle. Dans ce cas on sait que f est limite uniforme sur $\mathfrak{M}\cup(\omega(\alpha) + \mathfrak{M})$ de fractions rationnelles f_n sans pôles dans cet ensemble. Il en résulte que

$$\frac{f(ax) - f(a)}{1 - x} = \lim_n \frac{f_n(ax) - f_n(a)}{1 - x}$$

est prolongeable sur $1 + \mathfrak{M}$ (la convergence uniforme du deuxième membre sur $\mathfrak{M}$ est évidente, et sur $1 + \mathfrak{M}$ se vérifie immédiatement en posant $y = 1 - x$). Nous considérons alors la fonction $g(x) = (f(ax))/1 - x$, c'est-à-dire

$$g\langle n\rangle = \sum_{m=0}^{n} a^m f\langle m\rangle ,$$

l'unicité de la décomposition dans le théorème de Mittag-Leffler montre que $g_1(x) = (f(a))/1 - x$, c'est-à-dire $g_1\langle n\rangle = f(a)$. En particulier, pour $n = 0$, on trouve d'après la proposition 9 :

$$f(a) = - \lim_{h\times\to 0} \sum_{k=1}^{p^h-1} g\langle kp^h\rangle = - \lim_{h\times\to 0} \sum_{k=1}^{p^h-1} \sum_{m=0}^{kp^h} a^m f\langle m\rangle$$

$$= - \lim_{h\times\to 0}[(p^h - 1) \sum_{m=0}^{p^h} a^m f\langle m\rangle + (p^h - 2) \sum_{m=p^h-1}^{2p^h} a^m f\langle m\rangle + \dots$$
$$+ 1 \sum_{m=p^h(p^h-2)}^{p^h(p^h-1)} a^m f\langle m\rangle + 0 \sum_{m=p^h(p^h-1)}^{2h} a^m f\langle m\rangle]$$

les quantités $a^m f\langle m\rangle$ étant bornées et h tendant vers l'infini, on peut réecrire l'expression ci-dessus en remplaçant $-(p^h - k)$ par k. Or on sait que, puisque $\lim_{h\times\to 0} a^{p^h} = \omega(\alpha)$, on a :

$$\lim_{h\times\to 0} \sum_{k=1}^{p^h-1} a^{kp^h} f\langle kp^h\rangle = \langle f , \alpha\rangle(0) = 0 .$$

On en déduit alors l'expression de $f(a)$ indiquée en retranchant à la valeur déjà trouvée cette quantité nulle.

Pour la dernière partie du théorème, nous supposons que $f_0 = 0$. Ceci revient à dire que $f\langle n\rangle$ est, modulo p^N, périodique pour $n = 1 , \dots$ (le cas $n = 0$ correspondant à la valeur éventuellement non nulle de $f(\infty)$). Il est connu (voir [10]) que $\hat{\underset{\sim}{Z}} = \mathrm{Gal}(\overline{\underset{\sim}{F}}_p/\underset{\sim}{F}_p)$ est isomorphe aux idèles finis (produit pour les nombres premiers des $\underset{\sim}{Z}_p$) ou, ce qui revient au même, est le complété de $\underset{\sim}{N}$ $(= 1 , \dots)$ pour la topologie multiplicative (l'isomorphisme faisant correspondre à l'élément 1 le Frobenius $\alpha \to \alpha^p$). Il est maintenant clair qu'une fonction sur $\underset{\sim}{N}$ se prolonge en une fonction continue de $\hat{\underset{\sim}{Z}}$ dans $\mathfrak{A}$ si, et seulement si, elle est pour tout N, périodique modulo p^N.

Remarques. - La condition de prolongeabilité peut s'écrire, en remplaçant $\omega(\alpha)$ par a, comme nous l'avons vu en cours de démonstration ; ceci laisse penser que, par ce procédé, on ne pourra rien savoir de la prolongeabilité de f sur des ensembles $\mathcal{S}$ qui ne sont pas réunion de boules de rayon 1^-.

On a trouvé une formule montrant que, sur les ensembles $\mathcal{S}$, du type ci-dessus, où f est prolongeable, f est limite d'une suite de polynômes, ceux-ci n'ont aucune raison de converger uniformément. D'autre part, la formule donne encore un résultat si f n'est pas prolongeable dans $\omega(\alpha) + \mathfrak{M}$, il s'agit en fait alors du prolongement de $f - f_\alpha$.

2. Eléments analytiques multiformes.

2.1: Si A est un domaine d'intégrité de corps des fractions K, nous noterons $K(x)$ l'ensemble des fractions rationnelles sur K et $A[x_1 , \dots , x_r]$ l'ensemble des polynômes à r variables sur A.

Nous dirons qu'un élément f de $\mathfrak{F}_1(A)$ est algébrique s'il existe un polynôme non nul P de $A[x , y]$ tel que $P(x , f) = 0$ (tout élément algébrique, au sens usuel, sur $K(x)$ vérifie une équation de ce type).

L'ensemble EAM (éléments analytiques multiformes) est la fermeture dans $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{A})$ de l'ensemble des éléments algébriques de $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{A})$.

Nous appellerons diagonale d'un élément f de $\mathfrak{F}_r(A)$ l'élément Δf de $\mathfrak{F}_1(A)$

défini par

$$\Delta f(x) = \sum_{\underset{\sim}{N}} f\langle n , \dots , n\rangle x^n .$$

THÉORÈME 11 (FURSTENBERG). - Soit A un domaine d'intégrité, et soit P un polynôme de $A[x , y]$, alors l'équation

(1) $$y - xP(x , y) = 0$$

a une, et une seule, racine f dans $\mathfrak{F}_1(A)$ qui vérifie $f(0) = 0$, cette racine est telle que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$f^n = \Delta\left[\frac{y^n[1 - xyP'_y(xy , y)]}{1 - xP(xy , y)}\right] .$$

La première partie de ce théorème est classique et due à Cauchy, on obtient le résultat par itération. Posons :

$$f_0 = 0 , \qquad f_{n+1} = xP(x , f_n) ,$$

et montrons par récurrence que $f_n = f_{n-1} + x^n g_n$. Ceci étant clair pour $n = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= xP(x , f_{n-1} + x^n g_n) = xP(x , f_{n-1}) + x^{n+1} g_{n+1} \\ &= f_n + x^{n+1} g_{n+1} \end{aligned}$$

les f_n convergent donc, au sens de la topologie x-adique, vers un élément f qui vérifie bien l'équation (1). Les f_n appartenant tous à $A[x]$, il est clair que f appartient à $\mathfrak{F}_1(A)$, et vérifie $f(0) = 0$. L'unicité de la solution se montre en remarquant que, si g est une autre solution, on a :

$$f - g = xP(x , f) - P(x , g) = x(f - g) R(x , f , g) ,$$

c'est-à-dire $f = g$.

La deuxième partie est due à FURSTENBERG [8]. Comme f est racine du polynôme $y - xP(x , y)$, on a

$$y - xP(x , y) = (y - f) Q(x , y) ,$$

où Q appartient à $\mathfrak{F}_1(A)[y]$. Nous dérivons alors les deux polynômes par rapport à y

$$1 + xP'_y(x , y) = Q(x , y) + (y - f) Q'_y(x , y) ,$$

ce qui montre, en particulier, que $Q(0 , 0) = 1$, c'est-à-dire que Q est inversible dans $\mathfrak{F}_2(A)$, on trouve :

$$\frac{1 - xyP'_y(xy , y)}{Q(xy , y)} = 1 + (y - f(xy)) \frac{Q'_y(xy , y)}{Q(xy , y)} .$$

D'autre part, puisque $f(0) = 0$, $f(xy)/y$ appartient à $\mathfrak{F}_2(A)$, et $[1 - \frac{f(xy)}{y}]$ est inversible dans $\mathfrak{F}_2(A)$. Si nous multiplions par cet inverse, il vient

$$\frac{1 - xyP'_y(xy , y)}{1 - xP(xy , y)} = \sum_{m \in \underset{\sim}{N}} \frac{f^m(xy)}{y^m} + y \frac{Q'_y(xy , y)}{Q(xy , y)} .$$

Comme Q'_y/Q appartient à $\mathfrak{F}_2(A)$, dans le développement de $Q'_y/Q(xy , y)$, on ne trouvera que des termes "sous la diagonale", ce qui nous donne la formule annoncée.

COROLLAIRE 12. - Si f est la solution dans $\mathfrak{F}_1(A)$ de l'équation (1), et si $g = R(x , f)$ où R est un polynôme de $A(x)[y]$, alors :

$$g = \Delta[\frac{1 - xyP'_y(xy , y)}{1 - xP(xy , y)} R(xy , y)] .$$

Ce corollaire est évident.

COROLLAIRE 13. - Si K est un corps parfait, tout élément de $\mathfrak{F}_1(K)$, algébrique, est diagonal d'une fraction rationnelle à deux variables sur K .

On sait, d'après BATEMAN et DUQUETTE [4] ou [9], que, si K est un corps parfait, toute extension finie de $K(t)$, contenue dans $K((t^{-1}))$, est engendrée par un élément θ de Pisot, c'est-à-dire par un élément entier sur $K[t]$, dont tous les conjugués sont de valuation t^{-1}-adique positive, ce qui peut encore s'exprimer en disant que θ est racine d'un polynôme :

$$\theta^n + c_1(t)\ \theta^{n-1} + \dots + c_n(t) = 0$$

où les c_i sont des polynômes tels que $\deg(c_1) > \deg(c_i)$.

En particulier, si g est un élément algébrique de $\mathfrak{F}_1(K)$, $K(t)[g(\frac{1}{t})]$ est engendré par un élément de Pisot θ , $f(x) = 1/\theta(1/x)$ engendre alors $K(x , g(x))$ et vérifie une équation :

$$x^{\deg c_1}\ c_n(1/x)\ f^n(x) + \dots + x^{\deg c_1}\ c_1(1/x)\ f(x) + x^{\deg c_1} = 0$$

c'est-à-dire, en divisant par le coefficient du terme de degré le plus élevé dans c_1 , une équation du type : $f = xP(x , f)$. Comme $g = R(x , f)$, le corollaire 13 est une conséquence du corollaire 12.

Remarque. - Le corollaire 13 ne fonctionne pas si K n'est pas un corps, car nous avons divisé par un coefficient de c_1 : tout élément algébrique de $\mathfrak{F}_1(A)$ est diagonale d'une fraction rationnelle de $\mathfrak{F}_2(K)$, mais rien n'impose à cette fraction rationnelle d'avoir ses coefficients dans A . Nous allons, dans le paragraphe suivant, montrer comment tourner cette difficulté.

Pratiquement, on considère la fonction

$$g(x) = x^{-h}[f(x) - \sum_{n=0}^{h} f\langle n\rangle\ x^n] ,$$

où h est le maximum des valuations x-adiques des différences de f avec ses conjugués de telle sorte que g est solution d'une équation du type (1), on peut d'ailleurs démontrer le corollaire 13 par cette méthode.

2.2: Si A est un domaine d'intégrité, on dira que f est un élément algébrique régulier, s'il est algébrique et diagonal d'une fraction rationnelle de $\mathfrak{F}_2(A)$.

PROPOSITION 14. - Si M est un idéal maximal de A tel que A/M soit un corps k parfait, alors tout élément $\overline{f}$ de $\mathfrak{F}_1(k)$ algébrique se relève en un élément algébrique régulier f de $\mathfrak{F}_1(A)$.

D'après le corollaire 13, on sait que :

$$\overline{f} = \Delta[\frac{1 - xy\overline{P}'_y(xy , y)}{1 - x\overline{P}(xy , y)} \overline{R}(xy , y)] ,$$

où $\overline{P}$ et $\overline{R}$ sont des polynômes de $k[x , y]$ et $k(x)[y]$ respectivement. On choisit alors un relèvement de k dans A , $\overline{P}$ et $\overline{R}$ se relèvent en P et R . Si nous posons

$$f = \Delta[\frac{1 - xyP'_y(xy , y)}{1 - xP(xy , y)} R(xy , y)] ,$$

f est un relèvement de $\overline{f}$. Le corollaire 12 montre alors que, si g est la racine de l'équation $g - xP(x , g) = 0$ telle que $g(0) = 0$, $f = R(x , g)$, c'est-à-dire que f est algébrique et, comme f est diagonale d'une fraction rationnelle, f est algébrique régulier.

PROPOSITION 15. - Soient A un sous-anneau séparable saturé de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{F}$ un sous-A-module de $\mathfrak{F}_1(A)$ qui contient les éléments algébriques réguliers et nous supposons que, pour tout f de $\mathfrak{F}$, il existe a dans A tel que $v(a) = v(f)$, et $\overline{(f/a)}$ soit algébrique sur $\overline{\underset{\sim}{F}}_p(x)$. Alors les éléments de $\mathfrak{F}$ sont limites uniformes d'éléments algébriques réguliers.

Soit α_n la suite qui compose $v(A)$, supposons qu'il existe f_n , élément algébrique régulier de $\mathfrak{F}_1(A)$, tel que $v(f - f_n) = \alpha_n$. f_n appartient à $\mathfrak{F}$, il en est de même de $f - f_n$, et il existe a tel que $v(a) = \alpha_n$ et $(f - f_n)/a$ soit algébrique sur $\overline{\underset{\sim}{F}}_p$. En appliquant la proposition 14 à W , il existe g_n dans $\mathfrak{F}_1(W)$ algébrique régulier tel que $v(f - f_n - ag_n) > \alpha_n$, il suffit donc de poser $f_n + ag_n = f_{n+1}$, puisque A est saturé, ag_n est un élément de $\mathfrak{F}_1(A)$ et donc f_{n+1} aussi ; d'autre part, il est clair que f_{n+1} est algébrique régulier, et vérifie $v(f - f_{n+1}) = \alpha_r$ avec $r \geqslant n + 1$. La proposition est alors démontrée par récurrence.

Exemples de famille $\mathfrak{F}$.

- Les éléments algébriques de $\mathfrak{F}_1(A)$.
- Les limites uniformes d'éléments algébriques de $\mathfrak{F}_1(A)$.
- Les éléments analytiques multiformes de Krasner sur $B(0 , 1^-)$, à coefficients dans A .
- La famille $\mathfrak{D}(A)$ du § 3.

Question : Existe-t-il un élément algébrique de $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{A})$ dont les coefficients ne soient pas dans un anneau séparable ? Dans les autres cas, on voit que les éléments algébriques sont limites uniformes de fractions rationnelles.

3. L'algèbre $\mathcal{D}(A)$.

3.1: Dans la suite, A sera un sous-anneau de $\mathcal{A}$. Une fraction rationnelle sera un élément de $\mathfrak{F}_r(A)$ qui peut s'écrire $P/(1 + Q)$, où P et Q sont des polynômes à coefficients dans A avec $Q(0 , \dots , 0) = 0$. Dans le cas où A est noethérien et intégralement clos (anneau de valuation par exemple), on peut démontrer que toute fraction rationnelle de $\mathfrak{F}_r(A)$ peut s'écrire sous la forme indiquée (lemme de Fatou).

Nous dirons que f appartient à $\mathcal{D}^0(A)$ s'il existe une fraction rationnelle dont f soit la diagonale (nous considérons des fractions rationnelles à un nombre quelconque de variables). Nous appellerons $\mathcal{D}(A)$ la fermeture dans $\mathfrak{F}_1(A)$ de $\mathcal{D}^0(A)$.

PROPOSITION 16. - $\mathcal{D}^0(A)$ est une A-algèbre stable par produit de Hadamard.

Si f appartient à $\mathfrak{F}_r(A)$ et si g appartient à $\mathfrak{F}_s(A)$, avec $r \geqslant s$, on a :

$$\Delta[f(x_1 , \dots , x_r) + \frac{1}{1 - x_{s+1}\dots x_r} g(x_1 , \dots , x_s)] = \Delta f + \Delta g$$

$$\Delta(af) = a\Delta f \quad \text{pour tout } a \text{ de } A ,$$

ce qui montre que $\mathcal{D}^0(A)$ est un A-module. Il n'est pas difficile de voir

$$\Delta[f(x_1 y_1,\dots,x_{s-1} y_{s-1},x_s,\dots,x_r)\, g(x_1,\dots,x_{s-1},x_s y_1\dots y_{s-1} x_{s+1}\dots x_r)]=\Delta f.\Delta g$$

qui montre bien que $\mathcal{D}^0(A)$ est stable par produit, enfin il est clair que

$$\Delta[f(x_1 , \dots , x_r)\, g(y_1 , \dots , y_s)] = \Delta f * \Delta g$$

ce qui achève la démonstration de la proposition.

PROPOSITION 17. - Si f appartient à $\mathcal{D}^0(A)$, alors la fonction

$$Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f\langle n + 1\rangle x^n$$

appartient aussi à $\mathcal{D}^0(A)$.

Nous supposons que f est diagonale de $g(x_1 , \dots , x_r)$. Soit $g_{\hat{i}}$ la fonction de r variables obtenue en faisant $x_i = 0$ dans g , nous posons :

$$G(x_1 ,\dots, x_r) = g - \sum_{i=1}^{r} g_{\hat{i}} + \sum_{i,j} g_{\hat{i}\hat{j}} +\dots+ (-1)^r g(0 , 0 ,\dots, 0) .$$

Il est clair que $G_{\hat{i}} = 0$ pour tout i , c'est-à-dire que G est divisible par $x_1\dots x_r$. On vérifie donc :

$$\frac{G(x_1 , \dots , x_r)}{x_1\dots x_r} = \frac{f(x) - f(0)}{x} = Tf(x) .$$

COROLLAIRE 18. - Les propositions 16 et 17 sont vraies en remplaçant $\mathcal{D}^0$ par $\mathcal{D}$.

C'est évident par passage à la limite uniforme.

3.2: L'application N . - r est maintenant un nombre fixé. Si f appartient à

$\mathfrak{F}_r(A)$ et si ℓ appartient à $(\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z})^r$, $\ell = (\ell_1 , \dots , \ell_r)$, on pose :

$$f^{(\ell)} = \sum_{n_i \equiv \ell_i (\mathrm{mod}\ p)} f(n_1 , \dots , n_r)\, x_1^{n_1} \dots x_r^{n_r} .$$

On voit en particulier que $f^{(\ell)} = x_1^{\ell_1} \dots x_r^{\ell_r}\, g(x_1^p , \dots , x_r^p)$.

PROPOSITION 19. - <u>Soit</u> s <u>une bijection de</u> $(1 , \dots p^r)$ <u>dans</u> $(\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z})^r$, <u>et soit</u> $[f_\ell]$ <u>une famille d'éléments de</u> $\mathfrak{F}_r(A)$ <u>indexée par</u> $(\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z})^r$, <u>alors</u>

$$\det[f_{s(j)}^{(s(i)-sj))}] ,$$

<u>où</u> i <u>et</u> j <u>numérotent les lignes et les colonnes du déterminant et varient de</u> 1 <u>à</u> p^r , <u>est une fonction de</u> $x_1^p , \dots , x_r^p$.

En effet, chaque terme du déterminant s'écrit à l'aide d'une permutation σ des éléments $1 , \dots , p^r$:

$$(-1)^{\overline{\sigma}} \prod_j f_{s(j)}^{(s(\sigma(j))-s(j))} = x_1^{\sum_j [s(\sigma(j))]_1 - [s(j)]_1} \dots x_r^{\sum_j [s(\sigma(j))]_r - [s(j)]_r}\, g(x_1^p , \dots , x_r^p))$$

ce qui donne le résultat en remarquant que, pour toute permutation,

$$\sum_j [s(\sigma(j))]_i = \sum_j [s(j)]_i .$$

Avec les notations ci-dessus, nous noterons $\{f_\ell\}$ l'élément de $\mathfrak{F}_r(A)$, défini par $\{f_\ell\}(x_1^p , \dots , x_r^p) = \det[f_{s(j)}^{(s(i)-s(j))}]$.

PROPOSITION 20. - $\{f_\ell\}$ <u>est indépendant du choix de la bijection</u> s .

Si s' est une autre bijection de $(1 , \dots , p^r)$ dans $(\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z})^r$, $s^{-1} s'$ est une permutation des nombres $(1 , \dots , p^r)$. En faisant cette permutation sur les lignes et les colonnes du déterminant, on ne change pas sa valeur, mais on remplace s par s' dans sa définition.

PROPOSITION 21. - <u>Si</u> k <u>appartient à</u> $(\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z})^r$, <u>alors</u> $\{f_{\ell+k}\} = \{f_\ell\}$.

Si on pose $s'(j) = s(j) + k$, s' est aussi une bijection de $(1 , \dots p^r)$ dans $(\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z})^r$, et $\{f_\ell\}$, écrit avec cette bijection, n'est autre que $\{f_{\ell+k}\}$.

Si f appartient à $\mathfrak{F}_r(A)$, on pose $Nf = \{f_\ell\}$ avec $f_\ell = f$ pour tout ℓ .

PROPOSITION 22. - <u>On a</u> $\{f_\ell\}.Ng = \{gf_\ell\}$, <u>en particulier</u> $N(fg) = Nf.Ng$.

On vérifie facilement que :

$$(fg)^{(\ell)} = \sum_{k \in (\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z})^r} f^{(k)}\, g^{(\ell-k)} .$$

Il en résulte que

$$\det[f_{s(j)}^{(s(i)-s(j))}].\det[g^{(s(i)-s(j))}] = \det[\sum_k f_{s(j)}^{(s(k)-s(j))}\, g^{(s(i)-s(k))}]$$

$$= \det[(f_{s(j)})\, g^{(s(i)-s(j))}]$$

ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 23. - $v[N(f+g) - Nf - Ng] \geqslant \inf_{0 \leqslant h < r}[p^h[v(f) + v(g)] + r - h]$.

Soit Θ et Θ' deux applications de $(\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z})^r$ dans l'ensemble à deux éléments (f , g) , on dira que Θ est équivalent à Θ' s'il existe k tel que, pour tout ℓ , on ait $\Theta(\ell + k) = \Theta'(\ell)$. D'après la proposition 21, si Θ et Θ' sont équivalents, $\{\Theta(\ell)\} = \{\Theta'(\ell)\}$. Un déterminant étant multilinéaire, on a

$$N(f+g) = \Sigma_{\Theta}\{\Theta(\ell)\} = \Sigma_{\mathfrak{T}}|\mathfrak{T}|\{\Theta(\ell)\} ,$$

où $\mathfrak{T}$ représente la classe d'équivalence de Θ et $|\mathfrak{T}|$ le nombre d'éléments de cette classe. Calculons $|\mathfrak{T}|$; l'application de $(\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z})^r$ dans $\mathfrak{T}$, définie par $k \longrightarrow \Theta(. + k)$, est un homomorphisme, le nombre d'éléments de $|\mathfrak{T}|$ est donc égal au nombre d'éléments du groupe $(\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z})^r/H$, où H est défini par " k appartient à H si, et seulement si, pour tout ℓ , $\Theta(k + \ell) = \Theta(\ell)$ ". Nous mettons alors de côté les deux classes constantes, qui ne contiennent qu'un seul élément, et dont la contribution sera Nf et Ng . Pour tout autre classe, Θ prend au moins $\mathrm{card}(H)$ fois la valeur f et $\mathrm{card}(H)$ fois la valeur g , comme il est par ailleurs clair que l'on a $v(\{f_\ell\}) \geqslant \Sigma\, v(f_\ell)$, on trouve :

$$v[|\mathfrak{T}|\{\Theta(\ell)\}] \geqslant \mathrm{card}(H)\, v(f) + \mathrm{card}(H)\, v(g) + v(p^r/\mathrm{card}(H))$$

comme H est un sous-groupe d'un groupe à p^r élément, H a p^h éléments (avec, dans le cas des classes non constantes, $h < r$), la contribution de la classe de Θ aura donc une valuation supérieure ou égale à $p^h\, v(f) + v(g) + r - h$, ce qui donne le résultat cherché.

COROLLAIRE 24. - <u>Si</u> f_i <u>est une famille finie d'éléments de</u> $\mathfrak{F}_r(A)$, <u>on a</u>

$$v[N(\Sigma_i\, f_i) - \Sigma_i\, N(f_i)] \geqslant 1 .$$

Les $v(f_i)$ étant positifs, on applique la proposition 23 avec $h = r - 1$.

3.3: <u>L'application</u> U . - Nous définissons trois opérateurs de $\mathfrak{F}_r(A)$ par :

$$Ff(x_1 , \dots , x_r) = f(x_1^p , \dots , x_r^p) ,$$

$$Uf\langle n_1 , \dots , n_r\rangle = f\langle n_1\, p , \dots , n_r\, p\rangle ,$$

$$Vf\langle n_1 , \dots , n_r\rangle = (f\langle n_1 , \dots , n_r\rangle)^p .$$

Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier, I désignant l'identité,

$$F(f+g) = Ff + Fg \; ; \quad U(f+g) = Uf + Ug \; ; \quad F(fg) = Ff.Fg ,$$

$$v(Ff) = v(f) \; ; \quad v(Uf) \geqslant v(f) \; ; \quad v(FVf - f^p) \geqslant 1 ,$$

$$UF = I \; ; \quad VF = FV \; ; \quad VU = UV \; ; \quad F\Delta = \Delta F \; ; \quad U\Delta = \Delta U ,$$

dans ces derniers cas, les deux opérateurs F (resp. U) correspondent d'une part à $\mathfrak{F}_r$ et d'autre part à $\mathfrak{F}_1$. Enfin, on trouve que $Uf = \{f_\ell\}$, où tous les f_ℓ valent 1 sauf l'un d'entre eux qui vaut f .

PROPOSITION 25. - $v(FNf - f^{p^r}) \geqslant 1$.

Il est clair en effet que $f = \sum_\ell f_\ell$; d'après le corollaire 24, on a

$$v[Nf - \sum_\ell N(f^{(\ell)})] \geqslant 1 .$$

Or, comme $(f^{(\ell)})^{(k)} = \delta_{\ell k} f^{(\ell)}$, $FN(f^{(\ell)})$ est un déterminant dont les seuls termes non nuls sont sur la diagonale et qui vaut donc $(f^{(\ell)})^{p^r}$. Comme nous sommes dans un sous-anneau de $\mathfrak{A}$, nous avons

$$v(\sum(f^{(\ell)})^{p^r} - (\sum f^{(\ell)})^{p^r}) \geqslant 1 ,$$

et on obtient la proposition en utilisant la linéarité de F .

g étant un élément de $\mathfrak{F}_r(A)$ tel que $g(0 , \dots , 0) = 1$, nous définissons l'opérateur T_g par la relation :

$$T_g(f) = U^{r-1}[Ng.U(\frac{f}{g})] = U^{r-1}[\{f , g , \dots , g\}]$$

la deuxième égalité provenant de la proposition 22.

PROPOSITION 26. - $v[U^r [f/g^{p^k}] - (T_{g^{p^k}}(f))/([V^r(g)]^{p^k})] \geqslant 1 + k$.

Il résulte de ce qui a déjà été vu que l'on a

$$v[F^r N^r(g) - g^{p^r}] \geqslant 1$$

ce qui montre, à l'aide de la proposition 25,

$$v[N(g) - F^{r-1} V^r(g)] \geqslant 1 .$$

Comme F et N commutent avec le produit, il vient

$$v[N(g)^{p^k} - F^{r-1}[V^r(g)]^{p^k}] \geqslant 1 + k$$

en multipliant alors par $U(f/g^{p^k})$, et en appliquant l'opérateur U^{r-1} , on trouve le résultat annoncé.

PROPOSITION 27. - <u>Si</u> Q <u>est polynôme à coefficients dans</u> A , <u>tel que</u>

$$Q(0 , \dots , 0) = 1 ,$$

<u>alors</u> T_Q <u>est un opérateur sur les polynômes, de plus, si</u> $\deg_i P$ <u>désigne le degré de</u> P <u>par rapport à la variable</u> x_i , <u>on a</u> :

$$\deg_i(T_Q(P)) \leqslant \sup[\deg_i(Q) , \deg_i Q + \frac{\deg_i P - \deg_i Q}{p^r}] .$$

Si P et Q sont des polynômes, d'après la définition de $\{ \}$, il est clair que $\{P , Q , \dots , Q\}$ est encore un polynôme et qu'il en est donc de même pour $T_Q(P) = U^{r-1}\{P , Q , \dots , Q\}$. Calculons le degré de ces polynômes

$$\deg_i\{P , Q , \dots , Q\} < [\deg_i P + (p^r - 1) \deg_i Q] \frac{1}{P}$$

il suffit alors de remarquer que l'opérateur U divise le degré des polynômes par p pour trouver la proposition.

Nous allons supposer maintenant que A est profini.

LEMME 28. - <u>Si</u> A <u>est un anneau profini, il existe</u> m <u>tel que, pour tout</u> a <u>de</u>

A , <u>on ait, pour</u> $h \geq 1$, $v(a^{p^{hm}} - a^{p^m}) \geq 1$.

A étant profini, $A/\mathfrak{M} \cap A$ est un corps fini, qui possède donc p^{m_0} éléments, il en résulte que $v(a^{p^{m_0}} - a) > 0$, mais comme A est aussi séparable

$$v(a^{p^{m_0}} - a) \geq \alpha_1 > 0 ,$$

il existe donc m_1 tel que $v(a^{p^{m_0+m_1}} - a^{p^{m_1}}) \geq 1$, il suffit donc de prendre $m = \sup(m_0 , m_1)$.

PROPOSITION 29. - m <u>et</u> Q <u>étant donnés comme ci-dessus, pour tout</u> h <u>et tout polynôme</u> P , <u>il existe un polynôme</u> R_h <u>tel que</u>

$$\begin{cases} v[U^{rmh}(P/Q^{p^k}) - R_h/(V^{mr} Q)^{p^k}] \geq 1 + k \\ \deg_i(R_h) \leq \sup[p^k \deg_i Q , (\deg_i P - p^k \deg_i Q)/p^{rmh} + p^k \deg_i Q] . \end{cases}$$

Le polynôme Q étant à coefficient dans A , le lemme 28 montre que :

$$v[V^{hm} Q - V^m Q] \geq 1$$

c'est-à-dire $v[(V^{hm} Q)^{p^k} - (V^m Q)^{p^k}] \geq 1 + k$. Si nous posons $T_{Q,k} = \prod_{\ell=0}^{m-1} T_{(V^{r\ell}Q)^{p^k}}$, la proposition 26 donne

$$v[U^{rm}(P/Q^{p^k}) - (T_{Q,k}(P))/(V^{mr} Q)^{p^k}] \geq 1 + k ,$$

ce qui nous donne enfin :

$$v[U^{rmh}(P/Q^{p^k}) - (T^{h-1}_{V^{mr}Q,k} . T_{Q,k}(P))/(V^{mr} Q)^{p^k}] \geq 1 + k .$$

Il suffit donc de prendre $R_h = T^{h-1}_{V^{mr}Q,k} . T_{Q,k}(P)$, la proposition 27 donne alors

$$\deg_i R_h \leq \sup[p^k \deg_i Q , (\deg_i R_{h-1} - p^k \deg_i Q)/p^{rm} + p^k \deg_i Q]$$

ce qui conduit au résultat (on a pris $R_0 = P$).

COROLLAIRE 30. - <u>Si</u> f <u>est une fraction rationnelle de</u> $\mathfrak{F}_r(\mathfrak{A})$, <u>alors la suite</u> $U^h f$ <u>converge uniformément si</u> $h \to \infty$.

Il résulte en effet de la proposition 29 que si h est un multiple de rm , $U^h f$ est de la forme (polynôme de degré borné / polynôme fixé) modulo p^{1+k} . Or f étant une fraction rationnelle a ses coefficients dans un anneau profini, auquel appartiennent les coefficients de R_h , il s'en suit que R_h ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, il existe donc h_0 et h_1 tels que $R_{h_0} = R_{h_1}$, comme R_h se déduit de R_{h-1} par un opérateur indépendant de h , pour h multiple de $mr(h_0 - h_1)h_1$, R_h est constant (modulo p^{1+k}) , ce qui démontre le corollaire.

COROLLAIRE 31. - <u>Si</u> f <u>appartient à</u> $\mathfrak{O}(\mathfrak{A})$, <u>alors</u> :

$$\mathfrak{U}f = \lim_{h \to \infty} U^h f$$

<u>existe et appartient à</u> $\mathfrak{O}(\mathfrak{A})$.

C'est une conséquence immédiate du corollaire précédent.

THÉORÈME 32. - Un élément f de $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{A})$ appartient à $\mathfrak{O}(\mathfrak{A})$ si, et seulement si, pour h entier et $0 \leqslant n < p^h$, les éléments

$$f_{n,h}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f\langle n + mp^h\rangle\, x^m$$

sont, pour tout k, en nombre fini modulo p^k.

La condition étant visiblement stable par passage à la limite uniforme, nous faisons la démonstration pour f fraction rationnelle. Comme dans le corollaire 30, tout se passera dans l'anneau profini engendré par les coefficients de f. On remarque alors que $f_{n,h}(x) = \frac{1}{x}\, U^h[x^{p^h-n} f(x)]$, c'est-à-dire que, si f est diagonale de P/Q, on a :

$$xf_{n,h} = \Delta[U^h[(x_1 \ldots x_r)^{p^h-n}\, (PQ^{p^{k-1}})/Q^{p^k}]] .$$

On a donc, pour $h = nrh_0 + i$, d'après la proposition 29, $x(f_{n,h})$ de la forme $R_{h_0}/(V^{mr}\, Q_i)^{p^k}$, où on a posé, pour $0 \leqslant i < mr$

$$U^i(P/Q) = P_i/Q_i .$$

Il est facile de voir que le degré des R_{h_0} est borné par une constante dépendant de k, P et Q, puisque les i sont en nombre fini ; comme dans le corollaire 30, cela montre bien que les R_{h_0} sont en nombre fini.

Pour la réciproque, nous démontrons tout d'abord un lemme.

LEMME 33. - Soient A un anneau fini, à élément unité tel que p ait une puissance nulle, et f appartenant à $\mathfrak{F}_1(A)$, tel que les $f_{n,h}$ soient en nombre fini, alors il existe $N + 1$ polynômes à coefficients dans A, avec $P_0 \neq 0$, tels que

$$P_0\, f + P_1\, VF(f) + \ldots + P_N\, V^N\, F^N(f) = 0 .$$

Puisque les $f_{n,h}$ sont en nombre fini, il en est de même des $V^k(f_{n,h})$, car, pour k assez grand, ceux-ci sont nuls. On prend pour N deux fois ce nombre, étant donné $N + 1$ polynômes de $A[x]$ de degré inférieur à p^N, nous posons :

$$g = x[P_0\, f + \ldots + P_N\, V^N\, F^N(f)] \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant n \leqslant p^N - 1 ,$$

on vérifie que $U^N(x^n\, g)$ est une A-combinaison linéaire des $V^k(xf_{n,h})$ et des $V^k(x^2\, f_{n,h})$. Si K est le nombre d'éléments de A, on voit donc que, pour chaque n, $U^N\, x^n\, g$ ne peut prendre que K^N valeurs. Il en résulte que g ne peut prendre que $(K^N)^{p^N}$ valeurs. Or il y a K^{p^N} façon de choisir un des polynômes (de degré strictement inférieur à N), c'est-à-dire $(K^{p^N})^{N+1}$ façon d'écrire g, il en résulte qu'il existe deux g différents qui sont égaux. Si, par différence, on trouvait une combinaison avec $P_0 = 0$ il suffirait d'appliquer $V^{-1}\, U$ au résultat pour se trouver dans le cas annoncé.

Si un élément f de $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{A})$ vérifie la condition du théorème, en regardant le terme constant des $f_{n,h}$, on voit que ses coefficients sont dans un anneau profini,

lui-même contenu dans un anneau A séparable et saturé (propositions 1 et 3). Nous allons démontrer que les éléments de $\mathfrak{F}_1(A)$, qui vérifient cette condition et dont les coefficients sont dans un sous-anneau profini, forment une famille $\mathfrak{F}$ de la proposition 15. Il est clair qu'ils forment un A-module (voir proposition 2 bis). D'après la partie directe du théorème, les éléments algébriques réguliers, en tant qu'éléments de $\mathfrak{Q}(A)$, appartiennent à cette famille. Enfin si a appartient à A et est tel que $v(f) = v(a)$, alors f/a vérifie encore la condition et ses coefficients sont dans l'anneau profini engendré par a et les coefficients de f. En regardant cet élément modulo $\mathfrak{M}$, on se trouve dans le cas du lemme 33, or, modulo $\mathfrak{M}$, VF n'est autre que la puissance p-ième, il en résulte que $\overline{(f/a)}$ est racine d'un polynôme non nul, c'est-à-dire est algébrique. La famille envisagée est donc formée de limite uniforme d'éléments algébriques réguliers c'est-à-dire d'éléments de $\mathfrak{Q}(A)$.

COROLLAIRE 34. - Un élément f appartient à $\mathfrak{Q}(\mathfrak{A})$ si, et seulement si, il est limite d'éléments algébriques dont les coefficients sont dans un anneau séparable.

La partie directe découle de la proposition 15 et de l'exemple qui suit. La réciproque a été démontrée dans le théorème 32.

4. Applications.

Nous n'énoncerons que deux résultats, dont les démonstrations très techniques s'appuient sur les corollaires 30 et 31.

PROPOSITION 35. - Avec les notations de BARSKY [3], si f appartient à $\mathfrak{Q}(\mathfrak{A})$, alors la mesure associée est à densité faible sur les entiers négatifs.

Si f est diagonale de $g(x, y)$, on peut donner le résultat :

$$d_{-n}(\mu_f) = \mathfrak{U}[\Delta[\frac{1}{1-y}\,\mathfrak{U}[\frac{1}{1-x-xy}\,\frac{t^n z^n}{1-xtz}\,g(t, z)]]]\langle 1\rangle .$$

PROPOSITION 36 (de prolongement). - Si f appartient à $\mathfrak{Q}(\mathfrak{A})$,

$$\lim_{h\to\infty} \sum_{k=1}^{p^h-1} a^{kp^h} f\langle n + kp^h\rangle$$

existe pour tout a de $\mathfrak{A}$ et tout n entier,

$$\lim_{h\to\infty} \sum_{n=0}^{p^{2h}-1} a^n f\langle n\rangle[[n/p^h] + 1]$$

existe pour tout a, et, sur chaque boule $(\omega(\alpha) + \mathfrak{M})$ est une fonction analytique dont la série de Taylor appartient à $\mathfrak{Q}(\mathfrak{A})$.

Par analogie avec le théorème 10, on pourrait parler de prolongement des éléments de $\mathfrak{Q}(\mathfrak{A})$, mais je ne sais démontrer aucune propriété de ce prolongement.

Signalons que si A est un p-anneau strict (SERRE [12]) on peut donner des formules explicites pour résoudre les équations algébriques dans $\mathfrak{F}_1(A)$.

On trouvera un résultat plus précis que le théorème 32, mais avec des hypothèses plus strictes, dans [7].

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Yvette). - Mesures p-adiques, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, 6e année, 1964/65, n° 16, 6 p.

[2] AMICE (Yvette) et FRESNEL (J.). - Fonctions zêta p-adiques des corps de nombres abéliens réels, Acta Arithm.,Warszawa, t. 20, 1972, p. 353-384.

[3] BARSKY (D.). - Mesures et éléments analytiques p-adiques, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 14e année, 1972/73, n° 22, 4 p.

[4] BATEMAN (Paul.T.) and DUQUETTE (A. L.). - The analogue of Pisot-Vijayaraghavan numbers in fields of formal power series, Illinois J. of Math., t. 6, 1962, p. 594-606.

[5] CHRISTOL (G.). - Equirépartition dans les séries formelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 11e année, 1969/70, n° 4, 13 p.

[6] CHRISTOL (G.). - Sur une opération analogue à l'opération de Cartier en caractéristique nulle, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, 1970, Série A, p. 1-3.

[7] DWORK (B.). - p-adic cycles. - Paris, Presses universitaires de France, 1969 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 37). p. 27-115.

[8] FURSTENBERG (H.). - Algebraic functions over finite fields, J. of Algebra, t. 7, 1967, p. 271-277.

[9] GRANDET-HUGOT (Marthe). - Nombres de Pisot dans un corps de séries formelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 8e année, 1966/67, n° 4, 12 p.

[10] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, Colloques internationaux du C. N. R. S. : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres [143, 1964, Clermont-Ferrand], p. 97-141. - Paris, Centre National de la Recherche Scientifique, 1966.

[11] ROBBA (Philippe). - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, Thèse Sc. math.,Paris, 1971.

[12] SERRE (J.-P.). - Corps locaux. - Paris, Hermann, 1962 (Actualités scientifiques et industrielles, 1296. Publication de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nangaco, 8).

(Texte reçu le 3 décembre 1973)

Gilles CHRISTOL
Résidence Bois des Roches
Bâtiment 29, Escalier 1
91240 SAINT MICHEL SUR ORGE