

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

DANIEL BARSKY

Mesures p -adiques à densité

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, n° 1 (1973-1974),
exp. n° 4, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_1_A2_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MESURES p-ADIQUES À DENSITÉ

par Daniel BARSKY

On étudie un sous-espace du dual des fonctions continues de \mathbb{Z}_p dans \mathbb{Q}_p .

Définitions. - \mathbb{Z}_p est l'anneau des entiers p-adiques, \mathbb{Q}_p est son corps de fractions, $|\cdot|$ est la valeur absolue sur \mathbb{Q}_p normalisée par $|p| = p^{-1}$, et $v(\cdot)$ est la valuation associée à valeur dans \mathbb{Z} .

$\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ est l'espace des fonctions continues sur \mathbb{Z}_p à valeurs dans \mathbb{Q}_p , muni de la norme de la convergence uniforme sur \mathbb{Z}_p ; si $f \in \mathcal{C}$,

$$|f| = \sup_{x \in \mathbb{Z}_p} |f(x)|.$$

\mathcal{C}' est le dual topologique de \mathcal{C} , muni de sa norme habituelle; si $\mu \in \mathcal{C}'$,

$$\|\mu\| = \sup_{f \neq 0} \frac{|\langle \mu, f \rangle|}{|f|}.$$

Les éléments de \mathcal{C}' sont les mesures p-adiques sur \mathbb{Z}_p .

$\varphi_{x,h}$ est la fonction caractéristique de la boule $\mathcal{B}(x, h)$ de centre x et de rayon p^{-h} .

Une suite très bien répartie bien ordonnée $U = \{u(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{Z}_p est une suite d'éléments de \mathbb{Z}_p telle que $v(u(i) - u(j)) = v(i - j)$ pour tout couple $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

φ_n est la fonction caractéristique de la boule $\mathcal{B}(u_n, \ell(n) + 1)$ ($\ell(n) = \lfloor \frac{\log n}{\log p} \rfloor$).

$\psi_{n,h}$ est la fonction caractéristique de la boule $\mathcal{B}(u_n, h)$.

Si M est un sous-ensemble fermé de \mathbb{Q}_p , $\mathcal{C}(M, \mathbb{Q}_p)$ est l'espace des fonctions continues de M dans \mathbb{Q}_p muni de la norme de la convergence uniforme sur M ;

$\mathcal{C}'(M, \mathbb{Q}_p)$ est le dual de $\mathcal{C}(M, \mathbb{Q}_p)$.

Si $f \in \mathcal{C}$ et si U est une suite très bien répartie bien ordonnée de \mathbb{Z}_p , on a une représentation unique de f sous la forme

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \varphi_n(x)$$

avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \text{ et } \sup_{n \geq 0} |a_n| = |f|;$$

a_n s'exprime par la formule

$$a_n = f(u_n) - f(u_{n-n\ell(n)p^{\ell(n)}}),$$

où $n = n_0 + n_1 p + \dots + n_{\ell(n)} p^{\ell(n)}$ ([3]).

1. Mesures p-adiques à densité.

DÉFINITION. - Une mesure p-adique μ est une mesure à densité si, pour tout point x de \mathbb{Z}_p , il existe un élément $d_\mu(x)$ de \mathbb{Q}_p tel que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} (\mu | \varphi_{x,h}) = d_\mu(x).$$

On notera D' l'espace des mesures p-adiques à densité sur \mathbb{Z}_p ; d_μ est la densité associée à μ .

On écrira désormais mesure au lieu de mesure p-adique. Si $\lim_{h \rightarrow \infty} (\mu | \varphi_{x,h})$ existe seulement sur un sous-ensemble M de \mathbb{Z}_p , on dira que μ est à densité sur M .

Exemple : La mesure de Dirac δ_x , au point $x \in \mathbb{Z}_p$, définie, si $f \in \mathbb{C}$, par $(\delta_x | f) = f(x)$.

$U = \{u(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite très bien répartie bien ordonnée de \mathbb{Z}_p , fixée une fois pour toute. Rappelons [3] que la meilleure suite extraite de U , convergeant vers $x \in \mathbb{Z}_p$, est définie par

$$h \rightarrow u(h(x)) \text{ avec } 0 \leq h(x) < p^h \text{ et } |u(h(x)) - x| \leq p^{-h}.$$

On la notera, dans la suite, $(u(h(x)))_{h \geq 0}$ ou $h \rightarrow u(h(x))$.

On définit l'élément φ_n^* de \mathbb{C}' par $(\varphi_m^* | \varphi_n) = \delta_{m,n}$ (symbole de Kronecker).

On sait [6] que $\mu \in \mathbb{C}'$ admet une représentation unique $\mu = \sum_{n \geq 0} b_n \varphi_n^*$, la série du second membre convergeant simplement vers μ avec $\sup_{n \geq 0} |b_n| = \|\mu\|$. On a $b_n = (\mu | \varphi_n)$.

PROPOSITION 1. - Une condition nécessaire et suffisante pour que, $\mu \in \mathbb{C}'$,

$$\mu = \sum_{n \geq 0} b_n \varphi_n^*$$

soit à densité au point $x \in \mathbb{Z}_p$ est que la limite suivante existe :

$$\lim_{h \rightarrow \infty} (b_{h(x)} - \sum_{\substack{q > q \\ q > h(x)}} \sum_{i=1}^{p-1} b_{h(x)+iq^k}) = d_\mu(x).$$

En effet, on a vu [3] que :

$$(\mu | \varphi_{x,h}) = (\mu | \psi_{h(x),h}) \text{ et } \psi_{h(x),h} = \varphi_{h(x)} - \sum_{\substack{q > q \\ q > h(x)}} \sum_{i=1}^{p-1} \varphi_{h(x)+iq^k}.$$

COROLLAIRE. - Si $\mu \in D'$, alors, si $\mu = \sum_{n \geq 0} b_n \varphi_n^*$:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} (b_{k+p^h} + b_{k+2p^h} + \dots + b_{k+(p-1)p^h}) = 0$$

pour tout entier $k \geq 0$.

En effet,

$$d_\mu(u_k) = \lim_{h \rightarrow \infty} (b_k - \sum_{\substack{q > q \\ q > k}} \sum_{i=0}^{p-1} b_{k+ip^l}).$$

PROPOSITION 2. - Si $\mu \in D'$, alors d_μ est limite simple sur \mathbb{Z}_p d'une suite de fonctions continues sur \mathbb{Z}_p .

En effet,

$$d_{\mu}(x) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{p^h-1} (\mu | \psi_{n,h}) \psi_{n,h}(x),$$

car

$$\sum_{n=0}^{p^h-1} (\mu | \psi_{n,h}) \psi_{n,h}(x) = (\mu | \psi_{h(x),h}) = (\mu | \varphi_{x,h}).$$

PROPOSITION 3. - Soit U une suite très bien répartie bien ordonnée de \mathbb{Z}_p et soit $\mu = \sum_{n=0}^{p^h-1} b_n \varphi_n^*$ une mesure à densité sur \mathbb{Z}_p . La fonction ω_{μ} de U dans K, définie par $u(n) \rightarrow \omega_{\mu}(u(n)) = b_n$, peut se prolonger à \mathbb{Z}_p en une limite simple de fonctions continues, en posant

$$\begin{aligned} \omega_{\mu}(x) &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{p^h-1} b_n \psi_{n,h}(x) \\ &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{p^h-1} \omega_{\mu}(u(n)) \psi_{n,h}(x). \end{aligned}$$

Si $x \notin U$, on a $\omega_{\mu}(x) = d_{\mu}(x)$.

Comme $\sum_{n=0}^{p^h-1} b_n \psi_{n,h}(x) = b_{h(x)}$, il suffit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$, $\lim_{h \rightarrow +\infty} b_{h(x)}$ existe.

Si $x \in U$, c'est évident, car la suite $h \rightarrow u(h(x))$ est stationnaire dans ce cas. Si $x \notin U$, la suite $h \rightarrow u(h(x))$ n'est pas stationnaire. Donc, pour tout entier H, il existe $h \geq H$ tel que $u_h(x) \neq u_{(h+1)}(x)$. Par conséquent, $q^h \leq (h+1)(x) < q^{h+1}$. Donc :

$$\langle \mu | \varphi_{x,h+1} \rangle = \langle \mu | \psi_{(h+1)(x),h+1} \rangle = (\mu | \varphi_{(h+1)(x)}) = b_{(h+1)(x)}.$$

Comme ces égalités sont vérifiées pour une infinité de valeurs de h, on a bien

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} (b_{h(x)} - \sum_{\substack{q^h > q^k > h(x)}} \sum_{i=1}^{p-1} b_{h(x)+iq^k}) = \lim_{h \rightarrow +\infty} b_{h(x)} = d_{\mu}(x).$$

PROPOSITION 4. - Soit μ une mesure à densité sur \mathbb{Z}_p . La densité d_{μ} , associée à μ , est nulle en tous points où elle est continue. L'ensemble des points, où d_{μ} n'est pas nulle, est contenu dans un ensemble maigre.

On sait [2] que l'ensemble des points de discontinuité de d_{μ} est un sous-ensemble maigre de \mathbb{Z}_p . Montrons que, une suite très bien répartie bien ordonnée U de \mathbb{Z}_p étant choisie, la fonction ω_{μ} de la proposition 3 est nulle en tous points où elle est continue. Si l'on montre ceci, alors, d'après la proposition 3, d_{μ} est nulle sur le complémentaire d'un ensemble maigre car U est maigre, ω_{μ} est limite simple de fonctions continues, et $\omega_{\mu}(x) = d_{\mu}(x)$ si $x \notin U$. Donc d_{μ} est nulle sur un sous-ensemble partout dense de \mathbb{Z}_p (car le complémentaire d'un ensemble maigre de \mathbb{Z}_p est partout dense) et, par conséquent, d_{μ} est nulle en tous points où elle est continue.

Il reste à montrer que ω_{μ} est nulle en tous points de continuité. Soit $u(k) \in U$ un point de continuité de ω_{μ} . On a

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \omega_{\mu}(u_{k+ip^h}) = \omega_{\mu}(u_k),$$

autrement dit,

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} b_{k+ip^h} = b_k .$$

Le corollaire de la proposition 1 montre que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{p-1} b_{k+ip^h} = 0$$

donc

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{p-1} b_{k+ip^h} = (p-1)b_k = 0$$

Soit maintenant $x \notin U$ un point de continuité de ω_μ . Soit η un réel > 0 tel que

$$|x - y| < \eta \Rightarrow |\omega_\mu(x) - \omega_\mu(y)| < \varepsilon .$$

Choisissons $u(k) \in U$ tel que $|x - u(k)| < \varepsilon$, et h de telle sorte que $|u(k + ip^h) - u(k)| < \eta$ et

$$\left| \sum_{i=1}^{p-1} b_{k+ip^h} \right| < \varepsilon \quad (p^h > k) \quad (\text{Corollaire de la prop. 1}).$$

Ces choix entraînent que $\left| \sum_{i=1}^{p-1} \omega_\mu(u(k + ip^h)) \right| < \varepsilon$, donc $|(p-1)\omega_\mu(x)| < \varepsilon$ et, par conséquent, $\omega_\mu(x) = 0$.

On a aussi la proposition très simple suivante.

PROPOSITION 5. - L'application d de D' dans $\tilde{\mathbb{Q}}_p^{\mathbb{Z}}$, définie par $\mu \xrightarrow{d} d_\mu$ est injective.

Pour la démonstration, voir [4].

Nous allons énoncer le théorème qui précise la proposition 4, et donner une indication sur sa démonstration (pour la démonstration, voir [4]).

THÉORÈME 1. - Si $\mu \in D'$, sa densité d_μ n'est pas nulle, au plus sur un ensemble dénombrable.

Indication sur la démonstration. - On montre que la proposition 4 reste vraie si μ est une mesure sur un sous-ensemble parfait M de $\tilde{\mathbb{Z}}_p$ à densité sur M . Puis on montre que si $\mu \in D'$, on peut associer à μ une mesure $\bar{\mu}$ sur $\mathcal{C}(M, \tilde{\mathbb{Q}}_p)$ à densité sur M telle que d_μ soit la restriction de \bar{d}_μ à M . Enfin, si $\mu \in D'$, d_μ est une limite simple de fonctions continues sur $\tilde{\mathbb{Z}}_p$, on range les discontinuités de d_μ dans des sous-ensembles fermés $P_{i(\alpha)}$, où $i \in \mathbb{N}$, α appartient aux ordinaux dénombrables et $\alpha < \beta(i)$, où $\beta(i)$ est un ordinal dénombrable (cf. [2]). On sait [2] que $P_{i(\alpha)}$ est la réunion d'un ensemble parfait $P_{i(\alpha)}^\Omega$ et d'un ensemble dénombrable $P_{i(\alpha)} - P_{i(\alpha)}^\Omega$. On montre alors, en utilisant ce qui précède, que d_μ n'est pas nulle uniquement sur un sous-ensemble de

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{\alpha < \beta(i)} (P_{i(\alpha)} - P_{i(\alpha)}^\Omega)$$

qui est dénombrable.

Ce théorème montre qu'à toute mesure $\mu \in D'$ on peut associer une suite de

couples, indexée sur les entiers ; $(\alpha_i, \lambda_i) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Q}_p$ avec $\sup_{i \in \mathbb{N}} |\lambda_i| < +\infty$, et telle que $d_\mu(\alpha_i) = \lambda_i$, $d_\mu(x) = 0$ si $x \notin \{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. On donnera, sans démonstration, le théorème qui caractérise les suites $(\alpha_i, \lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ associées aux mesures à densité.

THÉORÈME 2. - Soit $(\alpha_i, \lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de couples de $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Q}_p$. Pour qu'il existe une mesure $\mu \in \mathcal{D}'$ telle que

$$d_\mu(\alpha_i) = \lambda_i \text{ et } d_\mu(x) = 0 \text{ si } x \notin \{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}},$$

il faut et il suffit que les conditions (i) et (ii) soient satisfaites

(i) Il existe une permutation ρ des entiers et une suite croissante d'entiers positifs $N = (N(i))_{i \in \mathbb{I}}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$ et tout entier $h \geq 0$, la suite

$$\ell \rightarrow D(x, \ell, h) = \sum_i \lambda_i \text{ (avec } 1 \leq \rho(i) \leq N(\ell) \text{ et } \alpha_i \in \mathcal{B}(x, h)$$

converge.

S'il en est ainsi, il existe une mesure $\mu \in \mathcal{C}'$ telle que

$$\langle \mu | \varphi_{x,h} \rangle = \lim_{\ell \rightarrow \infty} D(x, \ell, h).$$

(ii) Pour toute suite très bien répartie bien ordonnée U de \mathbb{Z}_p , la fonction

$$d_U : u(n) \rightarrow \langle \mu | \varphi_n \rangle = b_n(U)$$

peut se prolonger en une fonction de \mathbb{Z}_p à valeur dans \mathbb{Q}_p , en posant

$$d_U(x) = \lim_{h \rightarrow +\infty} b_h(x)(U),$$

et on doit avoir

$$\text{si, } x \notin U \text{ et } x \notin \{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \quad d_U(x) = 0$$

et

$$\text{si, } x \notin U \text{ et } x = \alpha_i, \quad d_U(x) = \lambda_i.$$

Pour la démonstration, voir [4].

Les mesures à densité sur \mathbb{Z} sont liées aux éléments analytiques au sens de KRASNER sur la boule ouverte de rayon 1 de \mathbb{C}_p (complété de la clôture algébrique de \mathbb{Q}_p) [5].

Les mesures à densité sur $u(\mathbb{Z})$, où u est une isométrie de \mathbb{Z}_p , sont liées aux éléments analytiques multiformes au sens de KRASNER sur la boule ouverte de rayon 1 de \mathbb{C}_p , si $u(\mathbb{Z})$ possède certaines propriétés (voir [5]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Y.). - Mesures p -adiques, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, 6e année, 1964/65, n° 16, 6 p.
 [2] BAIRE (R.). - Leçon sur les fonctions discontinues. - Paris, Gauthier-Villars, 1905 [Réimpression 1930] (Monographies sur la Théorie des Fonctions).

- [3] BARSKY (D.). - Introduction aux mesures p -adiques, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Groupe d'étude de théorie des nombres, 15^e année, 1973/74, n° G2, 3 p.
- [4] BARSKY (D.). - Mesures p -adiques à densité (à paraître).
- [5] BARSKY (D.). - Mesures p -adiques et éléments analytiques (à paraître).
- [6] SERRE (J.-P.). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p -adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 12, p. 69-85).

(Texte reçu le 12 novembre 1973)

Daniel BARSKY
36 rue de Penthièvre
75008 PARIS
