

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

JEAN-LOUP MAUCLAIRE

Sur la régularité des fonctions additives

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, n° 1 (1973-1974),
exp. n° 23, p. 1-4

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_1_A19_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA RÉGULARITÉ DES FONCTIONS ADDITIVES

par Jean-Loup MAUCLAIRE

Notations.

$$A = \{f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C} ; f(mn) = f(m) + f(n) \text{ si } (m, n) = 1\} .$$

$$B = \{f \in A ; \forall p \in \mathbb{N}^* , \alpha \in \mathbb{N} , f(p^\alpha) = \alpha f(p)\} .$$

$$C = \{f \in B ; \exists c \in \mathbb{C} , f(n) = c \log n\} .$$

Si $f \in A$, on dit qu'un ensemble P de nombres premiers est le support de f si $f(p^\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ quand $p \notin P$, et $f(p^\alpha) \neq 0$ pour au moins un α quand $p \in P$. Si P est constitué d'un nombre fini d'éléments, on dit que f est à support fini. On notera D l'ensemble des $f \in A$, à support fini, et E l'ensemble des $f \in A$, bornées.

1. On doit à P. ERDÖS les résultats suivants [3] :

(1) Si $f \in A$, si $f(n+1) \geq f(n)$, $f \in C$.

(2) Si $f \in A$, si $f(n+1) - f(n) = o(1)$, $f \in C$.

Divers auteurs ont donné d'autres démonstrations de ces deux résultats [1], [2], [17], [18], [20], [22], et l'on a pu démontrer que

(3) Si $f \in A$, si

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (f(n+1) - f(n)) \geq 0 ,$$

alors $f \in C$. (Voir [10], [6].)

Dans [4], P. ERDÖS faisait les deux conjectures suivantes :

(4) Si $f \in A$, si $f(n+1) - f(n) = o(1)$, alors $f(n) = g(n) + h(n)$, $g \in C$, $h \in E$.

(5) Si $f \in A$, si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f(n+1) - f(n)| = 0 ,$$

alors $f \in C$.

Ces deux résultats ont été établis [11], [7], [24], et on a même montré que :

(6) Si $f \in A$, si

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f(n+1) - f(n)| = 0 ,$$

alors $f \in C$. (Voir [25], [19].)

2. Dans [8], I. KÁTAI montrait que :

(7) Si $f \in B$, si $f(2n+1) - f(n) \rightarrow \ell$ ($n \rightarrow +\infty$), $f \in C$. (Voir aussi [21].) La condition $f \in B$ n'est pas essentielle [12], et se remplace par $f \in A$. On peut montrer que :

(8) Si $f \in A$, si $f(an+b) - f(n) \rightarrow \ell$, $f(n) = g(n) + h(n)$, où $g \in C$, $h \in D$.

(9) Si $f \in A$, si $f(an+b) - f(n) = o(1)$, $f(n) = g(n) + h(n) + k(n)$, où $g \in C$, $h \in D$, $k \in E$.

(Il suffit de remarquer que si $f \in A$, et $q \in \mathbb{N}$, q fixé, $f(qn) - f(q) \in A$. On utilise alors les résultats de [15].) On a aussi :

(10) Si $f \in A$, si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f(an+b) - f(n) - \ell| = 0$, (a, b, ℓ fixés), $f(n) = h(n) + k(n)$, $h \in B$, $k \in D$, et $\ell = f(a)$. (Voir [15].)

On peut se poser alors le problème suivant :

(P) Est-il vrai que, si $f \in B$, si, pour un $a \in \mathbb{N}^*$ ($a > 1$), et un $\varepsilon = \pm 1$ (ε fixé), on ait

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f(an + \varepsilon) - f(an)| = 0,$$

alors $f \in C$? Je pense que oui, mais ne sais pas le démontrer.

3. Dans [8] et [9], I. KÁTAI fait diverses conjectures. En particulier : "Que peut-on dire de fonctions $f \in A$, $g \in A$, telles que $f(an+b) - g(n) \rightarrow \ell$?"

Des réponses partielles ont été données [13], [14], et depuis, on a pu montrer que :

(11) Si f et $g \in A$, si $f(an+b) - g(n) \rightarrow \ell$, alors $f = f_1 + f_2$, $g = g_1 + g_2$, où $f_1, g_1 \in C$, $f_2, g_2 \in D$ et $f_1 = g_1$.

(12) Si $f \in A$, $g \in A$ et $f(an+b) - g(n) = o(1)$, alors $f = f_1 + f_2 + f_3$, $g = g_1 + g_2 + g_3$, où $f_1, g_1 \in C$, $f_2, g_2 \in D$, $f_3, g_3 \in E$, et $f_1 = g_1$.

(13) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f(an+b) - g(n) - \ell| = 0$, alors $f = f_1 + f_2$, $g = g_1 + g_2$, avec $f_1, g_1 \in B$, $f_2, g_2 \in D$, et $f_1 = g_1$.

De même que (2) permet de donner une caractérisation des séries L [23], les méthodes utilisées pour démontrer (12) mènent au résultat suivant (voir [16]) :

(14) Si $G(s) = \prod_p (1/(1 - (g(p) \chi(p)/p^s))) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g(n) \chi(n)}{n^s}$ pour $\text{Re } s > \sigma$, avec $g(p) > 0$, et χ un caractère modulo q , s'il existe f multiplicative et $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tels que : $0 < k_1 \leq |(f(an+b))/g(n)| \leq k_2$, (a et b fixés), alors :

$$G(s) = L_{\chi}(s + \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

4. Si l'on pouvait prouver que la réponse à (P) est positive, cela permettrait de remplacer " $f_1, g_1 \in B$ " dans (13) par " $f_1, g_1 \in C$ ".

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BESICOVITCH (A. S.). - On additive functions of a positive integer, "Studies in mathematical analysis and related topics". p. 38-41. - Stanford, Stanford University Press, 1962 (Stanford Studies in Mathematics and Statistics, 4).
- [2] CSASZAR (A.). - Solution du problème 28 (posé par P. Erdős) [en hongrois], Matematikai Lapok, t. 3, 1952, p. 91-94.
- [3] ERDŐS (P.). - On the distribution function of additive functions, Annals of Math., t. 47, 1946, p. 1-20.
- [4] ERDŐS (P.). - On the distribution function of additive arithmetical functions, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, t. 27, 1958, p. 3-7.
- [5] KÁTAI (I.). - A remark on number theoretical functions, Acta arith., Warszawa, t. 14, 1968, p. 409-415.
- [6] KÁTAI (I.). - A remark on additive arithmetical functions, Annales Univ. Sc. Budapest, Sect. Math., t. 10, 1967, p. 81-83.
- [7] KÁTAI (I.). - On a problem of P. Erdős, J. Number Theory, t. 2, 1970, p. 1-6.
- [8] KÁTAI (I.). - Some results and problems in the theory of additive functions, Acta Sc. Math., Szeged, t. 30, 1969, p. 305-311.
- [9] KÁTAI (I.). - On number theoretical functions, "Number theory". p. 133-137. - Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1970 (Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 2).
- [10] MÁTÉ (A.). - A new proof of a theorem of P. Erdős, Proc. Amer. math. Soc., t. 18, 1967, p. 159-162.
- [11] MÁTÉ (E.). - On a problem of P. Erdős, Acta Sc. Math., Szeged, t. 30, 1969, p. 301-304.
- [12] MAUCLAIRE (J.-L.). - Sur la régularité des fonctions additives, Enseign. math., Genève, Série 2, t. 23, 1972, p. 167-174.
- [13] MAUCLAIRE (J.-L.). - On a problem of KátaI, Acta Sc. Math., Szeged, t. 36, 1974, p. 205-207.
- [14] MAUCLAIRE (J.-L.). - Sur une conjecture de KátaI, Acta Sc. Math., Szeged (à paraître).
- [15] MAUCLAIRE (J.-L.). - Sur la régularité des fonctions additives, C. R. Acad. Sc., t. 276, 1973, Série A, p. 431-433.
- [16] MAUCLAIRE (J.-L.). - On a characterization of Dirichlet's L-functions, Publ. Research Inst. math. Sc. Kyoto Univ. (à paraître).
- [17] MOSER (L.) and LAMBECK (J.). - On monotone multiplicative functions, Proc. Amer. math. Soc., t. 4, 1953, p. 544-545.
- [18] RÉNYI (A.). - On a theorem of P. Erdős and its application in information theory, Mathematica, Cluj, t. 1, 1959, p. 341-344.
- [19] RYAVEC (C.). - On additive functions, Michigan math. J., t. 16, 1969, p. 321-329.
- [20] SCHOENBERG (I. J.). - On two theorems of P. Erdős and A. Rényi, Illinois J. Math., t. 6, 1962, p. 53-58.
- [21] SKOF (F.). - Sulle funzioni $f(n)$ aritmetiche additive asintotiche a $C \log n$, Ist. Lombardo Accad. Sc. Lett., Rend., Série A, t. 103, 1969, p. 931-938.

- [22] SÓS (Vera T.). - Solution du problème 28 (posé par P. Erdős) [en hongrois],
Matematikai Lapok, t. 3, 1952, p. 91-94.
- [23] TURÁN (P.). - On a characterization of Dirichlet's L -functions, Ann. Univ.
Sc. Budapest, t. 8, 1965, p. 65-69.
- [24] WIRSING (E.). - A characterization of $\log n$ as an additive arithmetic func-
tion, Symposia Mathematica, Vol. 4, p. 45-57. - London, Academic Press,
1970 (Istituto nazionale di Alta Matematica).
- [25] WIRSING (E.). - Characterisation of the logarithm as an additive function,
"Number theory Institute", p. 375-381. - Providence, American mathematical
Society, 1971 (Proceedings of Symposia in pure Mathematics, 20).

(Texte reçu le 10 décembre 1974)

Jean-Loup MAUCLAIRE
Mathématiques, Bât. 425
Université Paris-Sud
Centre universitaire d'Orsay
91405 ORSAY
