Henri Cohen

Variations sur un thème de Siegel-Hecke

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, nº 1 (1973-1974), exp. nº 14, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_1_A11_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU (Théorie des nombres) 15e année, 1973/74, n° 14, 7 p.

25 février 1974

VARIATIONS SUR UN THÈME DE SIEGEL-HECKE

par Henri COHEN

0. Thème.

SIEGEL [4] a démontré le théorème suivant (voir [2]) :

THÉORÈME 0. - *Soient* K *un corps totalement réel de degré* r *sur* Q , $\mathfrak{d}$ *la différente de* K , *et* k *un entier positif pair. Posons :*

$$g_k(z) = \sum_{n\geq 0} a_k(n)\, q^n \quad (q = \exp 2i\pi z)$$

avec

$$a_k(0) = 2^{-r}\, \zeta_K(1-k)$$

$$a_k(n) = \sum_{x\in E_n} \sum_{\mathfrak{a}\supset x\mathfrak{d}} (N\mathfrak{a})^{k-1} \quad \textit{pour} \quad n \geq 1$$

où $E_n = \{x \in \mathfrak{d}^{-1} ;\ x \gg 0$ *et* $\mathrm{Tr}\, x = n\}$. *Alors, si* $(r , k) \neq (1 , 2)$, g_k *est une forme modulaire de poids* rk *sur* $SL_2(Z)$.

Le but de cet exposé est d'expliciter ce théorème et des propositions annexes dans les cas les plus simples. Les démonstrations détaillées, ainsi que des résultats plus complets, se trouvent dans [1].

1. Variation 1 .

Nous supposerons d'abord que K est un corps quadratique réel de discriminant D . Soit χ_D le caractère non trivial de K défini par $\chi_D(m) = (\frac{D}{m})$. On a

$$a_k(n) = \sum_{|a|<n\sqrt{D},\, a\equiv nD \pmod 2}\ \sum_{d|(n^2 D-a^2)/4} d^{k-1}\, S_{a,n,D}(d)$$

où $S_{a,n,D}(d) = \sum_{\mathfrak{a}\supset((a+n\sqrt{D})/2),\, N\mathfrak{a}=d} 1$. On démontre sans difficulté le résultat suivant.

PROPOSITION 1.1. - $S_{a,n,D}(d) = \sum_{e|(a,n,d,((n^2 D-a^2)/4d))} \chi_D(e)$.

Posons alors la définition suivante :

DÉFINITION 1.2. - *Soient* $z \in C$ *et* $x \in R$. *On définit* $\sigma_z(x)$:

(a) *Si* $x > 0$ *est entier,* $\sigma_z(x) = \sum_{d|x} d^z$,

(b) $\sigma_z(0) = \frac{1}{2}\zeta(-z)$ *pour* $z \neq -1$,

(c) $\sigma_z(x) = 0$ *si* $x \notin N$.

On déduit de la proposition 1.1 le théorème suivant.

THÉORÈME 1.3. - Pour tout $n \geq 1$,

$$a_k(n) = \sum_{d|n} d^{k-1} \chi_D(d) \sum_{a \in \mathbb{Z}} \sigma_{k-1}\left(\frac{(n/d)^2 D - a^2}{4}\right) ,$$

où la sommation sur a n'a pas besoin d'être précisée, grâce à la définition 1.2.

2. Variation 2 .

Les résultats précédents permettent de donner des formules explicites pour les valeurs de la fonction zêta des corps quadratiques réels aux entiers négatifs : On utilise le théorème 1.3 ainsi que [4] (p. 90). D'où, par exemple, le résultat suivant.

THÉORÈME 2.1.

$$\zeta_K(-1) = \frac{1}{60} \sum_{a \in \mathbb{Z}} \sigma_1\left(\frac{D - a^2}{4}\right)$$

$$\zeta_K(-3) = \frac{1}{120} \sum_{a \in \mathbb{Z}} \sigma_3\left(\frac{D - a^2}{4}\right)$$

$$\zeta_K(-5) = \frac{1}{49140} \left[\sum_{a \in \mathbb{Z}} \sigma_5(D - a^2) + (24 + 32(\chi_D(2))) \sum_{a \in \mathbb{Z}} \sigma_5\left(\frac{D - a^2}{4}\right)\right]$$

et ainsi de suite.

Ces formules sont, à ma connaissance, le moyen le plus rapide pour calculer $\zeta_K(1 - k)$ pour un corps quadratique réel K .

3. Variation 3 .

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $m \equiv 0$ ou $1 \pmod 4$, posons

$$c_z(m) = \sum_{a \in \mathbb{Z}} \sigma_z\left(\frac{m - a^2}{4}\right)$$

Notre but est de calculer $c_1(m)$ et $c_3(m)$ pour tout m . Le théorème 2.1 donne leur valeur quand m est un discriminant. On déduit en fait aisément du théorème 1.3, le suivant.

THÉORÈME 3.1. - Si D est un discriminant et $k = 2$ ou 4 :

$$c_{k-1}(n^2 D) = \left(\sum_{d|n} d^{k-1} \chi_D(d) \mu(d) \sigma_{2k-1}(n/d)\right) c_{k-1}(D) .$$

Soit encore, dans le langage des séries de Dirichlet, un corollaire.

COROLLAIRE 3.2. - Sous les mêmes hypothèses,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{c_{k-1}(n^2 D)}{n^s} = 30k\zeta_K(1 - k) \frac{\zeta(s)\, \zeta(s - 2k + 1)}{L(s - k + 1 , \chi_D)}$$

$$= 30k\zeta_K(1 - k) \prod_{p \text{ premier}} \frac{(1 - p^{k-1} \chi_D(p) p^{-s})}{(1 - p^{-s})(1 - p^{2k-1} p^{-s})}$$

(Comparer avec [3], p. 70-71).

Ceci fournit la valeur de $c_1(m)$ et $c_3(m)$ quand m n'est pas un carré.

Quand $m = n^2$ est un carré, on fait le calcul par des procédés élémentaires. On démontre d'abord le résultat suivant.

PROPOSITION 3.3.

(a) $\sigma_z(n)\,\sigma_z(m) = \sum_{d|(n,m)} d^z\,\sigma_z(\frac{nm}{d^2})$,

(b) $\sum_{1\leq m<n} \sigma_z(m)\,\sigma_z(n-m) = \sum_{d|n} d^z \sum_{1\leq m<n/d} \sigma_z(m((n/d)-m))$.

D'autre part, avec les notations de [5], on a

$$E_4^2(z) = E_8(z) \ ; \ E_2^2(z) = E_4(z) + \frac{6}{i\pi}\,E_2'(z) \ .$$

On en déduit aisément un nouveau théorème.

THÉORÈME 3.4.

(a) $c_1(n^2) = \frac{5}{12} \sum_{d|n} \mu(d)\, d\sigma_3(\frac{n}{d}) - \frac{1}{2} f^2$,

(b) $c_3(n^2) = \frac{1}{120} \sum_{d|n} \mu(d)\, d^3\,\sigma_7(\frac{n}{d})$.

COROLLAIRE 3.5.

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{c_1(n^2)}{n^s} = \frac{5}{12}\,\frac{\zeta(s)\,\zeta(s-3)}{\zeta(s-1)} - \frac{1}{2}\,\zeta(s-2)$,

(b) $\sum_{n\geq 1} \frac{c_3(n^2)}{n^s} = \frac{1}{120}\,\frac{\zeta(s)\,\zeta(s-7)}{\zeta(s-3)}$.

On constate donc que le corollaire 3.2 est aussi valable pour $D = 1$, à un terme correctif près pour c_1 , en convenant que $\zeta_K = \zeta_{\mathbb{Q}} \times \zeta_{\mathbb{Q}}$.

4. Variation 4 .

Posons $\theta(z) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} q^{s^2}$, $(q = \exp 2i\pi z)$, et comme précédemment soit

$$E_2(z) = -\,24 \sum_{n\geq 0} \sigma_1(n)\, q^n \ .$$

La variation 3 fournit les coefficients de la fonction $\theta(z)\,E_2(4z)$. En utilisant la théorie des formes modulaires de poids demi-entier (voir [3]), on démontre sans difficulté la proposition suivante.

PROPOSITION 4.1.

$$E_2(4z)\,\theta'(z) = E_2'(4z)\,\theta(z) + \frac{\theta''(z)}{2i\pi} \ .$$

On en déduit les corollaires suivants.

COROLLAIRE 4.2.

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}} s^2\,\sigma_1(\frac{n-s^2}{4}) = \frac{n}{5}\sum_{s\in\mathbb{Z}} \sigma_1(\frac{n-s^2}{4}) - \begin{cases} 0 & \underline{\text{si}}\ \ n\ \ \underline{\text{non carré}}, \\ \frac{n(n-1)}{15} & \underline{\text{si}}\ \ n\ \ \underline{\text{carré}}. \end{cases}$$

COROLLAIRE 4.3.

$$E_2(z)\ \theta'(z) = \frac{1}{4}\ E_2'(z)\ \theta(z) + \frac{2\theta''(z)}{i\pi} .$$

En combinant ce corollaire avec la proposition 4.1, on obtient un nouveau corollaire, dû à Jacobi.

COROLLAIRE 4.4.

(a) $\theta^4(z) = \dfrac{4E_2(4z) - E_2(z)}{3}$,

(b) $r_4(n) = 8(\sigma_1(n) - 4\sigma_1(n/4))$,

où on pose, pour tout k , $\theta^k(z) = \sum_{n\geq 0} r_k(n)\ q^n$.

Il existe des relations analogues pour σ_3 , mais elles sont plus compliquées. Citons, par exemple, la relation suivante.

PROPOSITION 4.5.

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}} s^2\ \sigma_3\left(\frac{n-s^2}{4}\right) = \frac{n}{9} \sum_{s\in\mathbb{Z}} \sigma_3\left(\frac{n-s^2}{4}\right) - \frac{7}{18} \sum_{s\in\mathbb{Z}} s^4\ \sigma_1\left(\frac{n-s^2}{4}\right)$$

$$+ \frac{n}{6} \sum_{s\in\mathbb{Z}} s^2\ \sigma_1\left(\frac{n-s^2}{4}\right) - \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ non carré,} \\ \dfrac{n(n-1)(3n-2)}{270} & \text{si } n \text{ carré.} \end{cases}$$

5. Variation 5 .

On peut utiliser les résultats précédents pour calculer $r_5(n)$. Par exemple, si n est un discriminant, on a

$$r_5(n) = \sum_{|s|\leq\sqrt{n}} r_4(n - s^2) = 8 \sum_{s\in\mathbb{Z}} \sigma_1(n - s^2) - 32 \sum_{s\in\mathbb{Z}} \sigma_1\left(\frac{n - s^2}{4}\right) .$$

Donc, d'après les théorèmes 2.1 et 3.1,

$$r_5(n) = (8(9 - 2(\tfrac{n}{2})) - 32) \sum_s \sigma_1\left(\frac{n - s^2}{4}\right) = 480(5 - 2(\tfrac{n}{2}))\ \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{n})}(-1) .$$

Plus généralement, si on convient que

$$\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{n})}(-1) = (\zeta_{\mathbb{Q}}(-1))^2 = 1/144 \quad \text{si } n \text{ est un carré,}$$

on démontre, de la même façon, le théorème ci-après.

THÉORÈME 5.1. - Posons $n = D.(2^\alpha f)^2$, où D est 1 ou un discriminant, f un entier impair, $\alpha \geq -1$ $[(\alpha = -1) \Longleftrightarrow (n \equiv 2 , 3 \pmod 4)]$. Alors

$$r_5(n) = \tfrac{1}{7}[2^{3\alpha+5}+3-2\chi_D(2)(2^{3\alpha+2}+3)](\textstyle\sum_{d|f} d\chi_D(d)\ \mu(d)\ \sigma_3(f/d)) \times 480\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{n})}(-1) .$$

6. Variation 6 .

Nous allons maintenant examiner l'application du théorème 0 aux cas où K est un corps cubique totalement réel.

Soient $K = \mathbb{Q}(\theta)$ un corps cubique totalement réel, σ_1 et σ_2 les K-isomorphismes non triviaux de K dans une clôture algébrique de K , et (u_1,u_2,u_3)

une base des entiers de K . Si (d_1 , d_2 , d_3) est la base duale de (u_1,u_2,u_3) (c'est-à-dire telle que $Tr(d_i u_j) = \delta_{ij}$), alors (d_1 , d_2 , d_3) est une base de la co-différente $\mathfrak{d}^{-1}$. Pour des raisons techniques, nous supposerons que la base d'entiers est telle que $Tr\, d_3 = 1$ (Par exemple, en prenant $u_3 = 1$).

On peut écrire :

$$a_k(n) = \sum_{x\in E_n} \sum_{d|N(x\mathfrak{d})} d^{k-1}\, S_x(d)$$

où $S_x(d) = \sum_{\mathfrak{a}\supset x\mathfrak{d},N\mathfrak{a}=d} 1$.

Malheureusement, contrairement au cas quadratique, je ne connais pas de formule simple analogue à la proposition 1.1 et donnant $S_x(d)$. Dans chaque cas, il faut faire un calcul particulier. Toutefois, on peut donner une bonne description de E_n .

THÉORÈME 6.1. - Supposons $Tr\, d_3 = 1$. Soit T le triangle de sommets (u_1,u_2) ; $(\sigma_1 u_1 , \sigma_1 u_2)$; $(\sigma_2 u_1 , \sigma_2 u_2)$. Alors :

$$E_n = \{x \; ; \; x = n[a(d_1 - d_3\, Tr\, d_1) + b(d_2 - d_3\, Tr\, d_2) + d_3]\}$$

où (a , b) parcourt l'ensemble Δ_n des points à coordonnées multiples de $1/n$ à l'intérieur du triangle T .

COROLLAIRE 6.2. - Si on prend $u_3 = 1$,

$$E_n = \{x \; ; \; x = n(ad_1 + bd_2 + d_3) \; , \; (a , b) \in \Delta_n\} .$$

Enfin on déduit du théorème 0 une nouvelle proposition.

PROPOSITION 6.3.

$$\zeta_K(-1) = -\frac{1}{63}\, a_2(1) ,$$

$$\zeta_K(-3) = \frac{1}{24570}\, (a_4(2) + 24a_4(1)) ,$$

et ainsi de suite.

Ce qui précède s'étend sans difficulté à un corps totalement réel de degré quelconque.

7. Exemple.

Soit K le corps cubique non abélien de discriminant 257 . On a $K = \mathbb{Q}(\theta)$, où θ est racine de l'équation :

$$X^3 - X^2 - 4X + 3 = 0 .$$

On sait que $(\theta , \theta^2 , 1)$ est une base des entiers de K , d'où, en appelant (d_1 , d_2 , d_3) la base duale :

$$E_1 = \{x \; ; \; x = ad_1 + bd_2 + d_3 \; , \; (a , b) \in \Delta_1\} ,$$

Δ_1 étant l'ensemble des points à coordonnées entières à l'intérieur du triangle T

de sommets

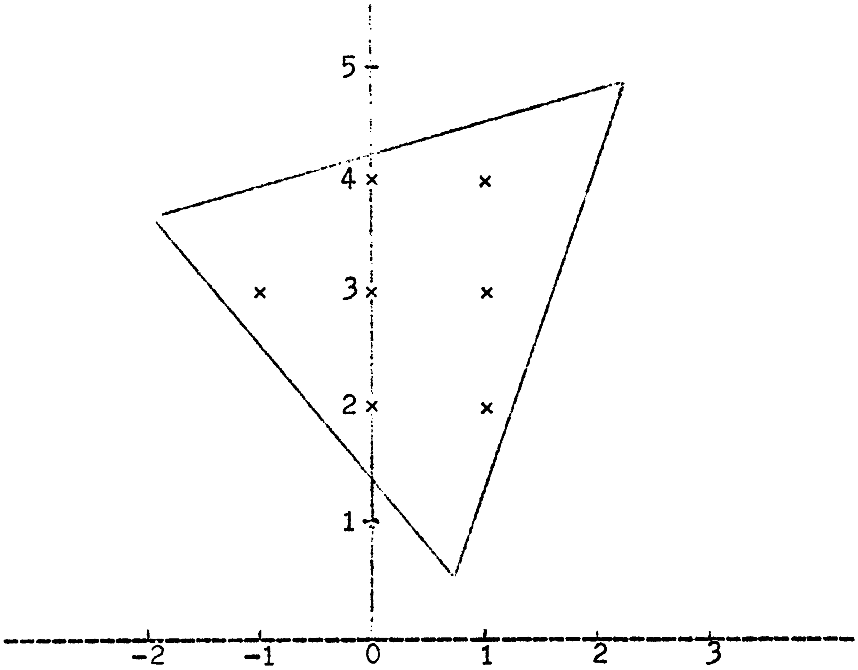
$$(\theta\ ,\ \theta^2)\ ;\ (\sigma_1\,\theta\ ,\ \sigma_1\,\theta^2)\ ;\ (\sigma_2\,\theta\ ,\ \sigma_2\,\theta^2)\ .$$

Un calcul numérique montre que

$$\theta = 0{,}71354\ldots\ ;\quad \sigma_1\,\theta = 2{,}19869\ldots\ ;\quad \sigma_2\,\theta = -1{,}91223\ldots$$

$$\theta^2 = 0{,}50914\ldots\ ;\quad \sigma_1\,\theta^2 = 4{,}83424\ldots\ ;\quad \sigma_2\,\theta^2 = 3{,}65662\ldots$$

d'où la figure :



Il y a donc 7 points dans E_1 . On obtient :

$N(x\mathfrak{b}) = 3$ pour $(a\ ,\ b) = (-\ 1\ ,\ 3)\ ,\ (0\ ,\ 4)\ ,\ (1\ ,\ 2)$,

$N(x\mathfrak{b}) = 5$ pour $(a\ ,\ b) = (0\ ,\ 2)\ ,\ (1\ ,\ 4)$,

$N(x\mathfrak{b}) = 7$ pour $(a\ ,\ b) = (1\ ,\ 3)$,

$N(x\mathfrak{b}) = 9$ pour $(a\ ,\ b) = (0\ ,\ 3)$.

Quand $x\mathfrak{b}$ est un idéal premier, il est clair que

$$\Sigma_{d\,|\,N(x\mathfrak{b})}\ d^{k-1}\ s_x(d) = \Sigma_{\mathfrak{a}\supset x\mathfrak{b}}(N\mathfrak{a})^{k-1} = 1 + (N(x\mathfrak{b}))^{k-1}\ .$$

Or, quand $N(x\mathfrak{b}) = 3$, 5 ou 7 , $x\mathfrak{b}$ est premier, et on vérifie que, pour $(a\ ,\ b) = (0\ ,\ 3)$, $x\mathfrak{b}$ est également un idéal premier, mais de degré 2 . Il en résulte que

$$a_k(1) = 7 + 3 \times 3^{k-1} + 2 \times 5^{k-1} + 7^{k-1} + 9^{k-1}$$

et en particulier :

$$\zeta_K(-\ 1) = -\,\frac{2}{3}\ .$$

D'autres exemples se trouvent dans [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] COHEN (H.). - Variations sur un thème de Siegel-Hecke, Publications mathématiques de l'Université de Bordeaux, 1973/74, fascicule 5 (à paraître).

[2] SERRE (J.-P.). - Formes modulaires et fonction zêta p-adiques, "Modular functions of one variable, III", p. 191-268. - Berlin, Springer-Verlag 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 350).

[3] SHIMURA (G.). - Modular forms of half integral weight, "Modular functions of one variable, I", p. 57-74. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 320).

[4] SIEGEL (C. L.). - Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen, Gött. Nach., t. 10, 1969, p. 87-102.

[5] SWINNERTON-DYER (H. P. F.). - On ℓ-adic representations and congruences for coefficients of modular forms, "Modular functions of one variable, III", p. 1-56. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 350).

(Texte reçu le 2 mai 1974)

Henri COHEN
Résidence Liotard, Tour E
99 boulevard Albert 1er
33000 BORDEAUX