Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Roger Paysant-Le Roux

Introduction à l'algorithme de Jacobi-Perron

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, n° 2 (1972-1973), exp. n° G6, p. G1-G7

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_2_A13_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de Théorie des nombres)
14e année, 1972/73, n° G6, 7 p.

4 décembre 1972

INTRODUCTION À L'ALGORITHME DE JACOBI-PERRON

par Roger PAYSANT - LE ROUX

1. Construction de l'algorithme.

Pour la détermination du p. g. c. d. de deux nombres naturels x , y , on se sert de l'algorithme d'Euclide, ce qui donne aussi le développement de y/x en fraction continue. Pour avoir un algorithme plus général, on part de la recherche du p. g. c. d. de $n+1$ nombres naturels donnés : x_0 , x_1 , ... , x_n

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = a_1\, x_0 + x'_0 \\ x_2 = a_2\, x_0 + x'_1 \\ \cdots \\ x_n = a_n\, x_0 + x'_{n-1} \\ x_0 = x'_n \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_1 = a'_1\, x'_0 + x''_0 \cdots \\ x'_2 = a'_2\, x'_0 + x''_1 \\ \cdots \\ x'_n = a'_n\, x'_0 + x''_{n-1} \\ x'_0 = x''_n \end{cases}$$

$$0 \leqslant x'_0 < x_0 \qquad 0 \leqslant x''_0 < x'_0 \cdots$$

x_0 , x'_0 , x''_0 , ... est une suite strictement décroissante d'entiers positifs, nous aurons à un certain rang t , $x_0^t = 0$.

Le même procédé doit alors être poursuivi, avec moins de $n+1$ nombres, jusqu'à ce que l'on ait deux nombres et, dans ce cas, il est identique à l'algorithme d'Euclide.

Nous pouvons écrire le système (1) de la façon suivante :

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{x_1}{x_0} = a_1 + \dfrac{x'_0}{x'_n} \\ \alpha_2 = \dfrac{x_2}{x_0} = a_2 + \dfrac{x'_1}{x'_n} \\ \cdots \\ \alpha_n = \dfrac{x_n}{x_0} = a_n + \dfrac{x'_{n-1}}{x'_n} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha'_1 = \dfrac{x'_1}{x'_0} = a'_1 + \dfrac{x''_0}{x''_n} \\ \alpha'_2 = \dfrac{x'_2}{x'_0} = a'_2 + \dfrac{x''_1}{x''_n} \\ \cdots \\ \alpha'_n = \dfrac{x'_n}{x'_0} = a'_n + \dfrac{x''_{n-1}}{x''_n} \end{cases}$$

ou bien au rang ν ,

$$\begin{cases} \alpha_1^\nu = a_1^\nu + \dfrac{1}{\alpha_n^{\nu+1}} \quad , \quad a_1^\nu = [\alpha_1^\nu] \\ \alpha_2^\nu = a_2^\nu + \dfrac{\alpha_1^{\nu+1}}{\alpha_n^{\nu+1}} \quad , \quad a_2^\nu = [\alpha_2^\nu] \\ \cdots \qquad\qquad\qquad\quad \cdots \\ \alpha_n^\nu = a_n^\nu + \dfrac{\alpha_{n-1}^{\nu+1}}{\alpha_n^{\nu+1}} \quad , \quad a_n^\nu = [\alpha_n^\nu] \end{cases}$$

où les (a_i^ν) vérifient la condition :

$$(3) \qquad (a_n^\nu , a_{n-1}^{\nu+1} , \dots , a_{n-1}^{\nu+i}) \geqslant (a_i^\nu , a_{i-1}^{\nu+1} , \dots , a_1^{\nu+i-1} , 1) ,$$

où $\geqslant$ note l'ordre lexicographique.

2. Développement formel.

Nous définissons des suites d'entiers $\{A_i^\nu\}_\nu$ $(i = 0 , 1 , \dots , n)$ par les formules de récurrence suivantes :

$$(4) \quad A_i^\nu = 0 \ (\nu \neq i , \ \nu \leqslant n) , \ A_i^i = 1 , \ A_i^{\nu+n+1} = A_i^\nu + a_1^\nu . A_i^{\nu+1} + \dots + a_n^\nu . A_i^{\nu+n}$$

$i = 0 , 1 , \dots , n ; \ \nu = 0 , 1 , 2 , \dots$

Pour tout entier $\nu \geqslant 0$, nous avons

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} A_0^\nu , A_0^{\nu+1} , \dots , A_0^{\nu+n} \\ A_1^\nu , A_1^{\nu+1} , \dots , A_1^{\nu+n} \\ \dots \\ A_n^\nu , A_n^{\nu+1} , \dots , A_n^{\nu+n} \end{vmatrix} = (-1)^{n\nu}$$

$$(6) \qquad \alpha_i = \frac{A_i^\nu + \alpha_1^\nu A_i^{\nu+1} + \dots + \alpha_n^\nu A_i^{\nu+n}}{A_0^\nu + \alpha_1^\nu A_0^{\nu+1} + \dots + \alpha_n^\nu A_0^{\nu+n}} \quad (i = 1 , 2 , \dots , n)$$

$$(7) \qquad \begin{cases} \alpha_n^1 \dots \alpha_n^\nu = A_0^\nu + \alpha_1^\nu A_0^{\nu+1} + \dots + \alpha_n^\nu A_0^{\nu+n} \\ \alpha_i . \alpha_n^1 \dots \alpha_n^\nu = A_i^\nu + \alpha^\nu{}_1 A_i^{\nu+1} + \dots + \alpha_n^\nu A_i^{\nu+n} \quad (i = 1 , 2 , \dots , n) . \end{cases}$$

3. Interruption.

L'algorithme, défini par le système (1), est appelé algorithme de Jacobi-Perron (noté A. J. P.) ; il peut être continué "sans interruption" aussi longtemps qu'aucun nombre entier n'apparaisse pour α_1^ν ; si au rang ν_1 , $\alpha_1^{\nu_1} \in \underset{\sim}{Z}$, alors on continue l'algorithme avec les nombres $\alpha_2^{\nu_1} , \dots , \alpha_n^{\nu_1}$.

THÉORÈME 1. - *Si l'algorithme de Jacobi-Perron a* m *interruptions, alors il existe au moins* m *relations indépendantes à coefficients dans l'anneau des entiers entre le système* $(1 , \alpha_1 , \dots , \alpha_n)$:

$$\exists \ P_i^{(k)} \in \underset{\sim}{Z} \ \text{tels que} \ P_0^{(k)} + P_1^{(k)} \alpha_1 + \dots + P_n^{(k)} \alpha_n = 0 \quad (k = 1 , \dots , m) .$$

Démonstration. - Après m interruptions, on a :

$$\alpha_i = \frac{A_i^{\nu+m} + \alpha_{m+1}^\nu A_i^{\nu+m+1} + \dots + \alpha_n^\nu A_i^{\nu+n}}{A_0^{\nu+m} + \alpha_{m+1}^\nu A_0^{\nu+m+1} + \dots + \alpha_n^\nu A_0^{\nu+n}} \quad (i = 1 , \dots , n)$$

$$A_i^{\nu+n+1} = A_i^{\nu+m} + a_{m+1}^\nu A_i^{\nu+m+1} + \dots + a_n^\nu A_i^{\nu+n} \quad (i = 0 , 1 , \dots , n) \quad \forall \ \nu > \nu_1 ;$$

ν_1 étant le rang correspondant à la dernière interruption, on a

$$\begin{vmatrix} \alpha_{m-i} & , A_{m-i}^{\nu+m} & , \dots , & A_{m-i}^{\nu+n} \\ \alpha_m & , A_m^{\nu+m} & , \dots , & A_m^{\nu+n} \\ \dots & & & \\ \alpha_n & , A_n^{\nu+m} & , \dots , & A_n^{\nu+n} \end{vmatrix} = \frac{1}{A_0^{\nu+m-1} + A_0^{\nu+m}.\alpha_{m+1}^{\nu-1} + \dots + A_0^{\nu+n-1}.\alpha_n^{\nu-1}}$$

$$\times \begin{vmatrix} A_{m-i}^{\nu+m-1} + A_{m-i}^{\nu+m}.\alpha_{m+1}^{\nu-1} + \dots + A_{m-i}^{\nu+n-1}.\alpha_n^{\nu-1} & , A_{m-i}^{\nu+m} & , \dots , & A_{m-i}^{\nu+n} \\ A_m^{\nu+m-1} + A_m^{\nu+m}.\alpha_{m+1}^{\nu-1} + \dots + A_m^{\nu+n-1}.\alpha_n^{\nu-1} & , A_m^{\nu+m} & , \dots , & A_m^{\nu+n} \\ \dots & & & \\ A_n^{\nu+m-1} + A_n^{\nu+m}.\alpha_{m+1}^{\nu-1} + \dots + A_n^{\nu+n-1}.\alpha_n^{\nu-1} & , A_n^{\nu+m} & , \dots , & A_m^{\nu+n} \end{vmatrix} = 0$$

$(i = 0 , 1 , \dots , m - 1)$.

4. Convergence des "réduites".

THÉORÈME 2. - On a :

$$\lim_{\nu \to +\infty} \frac{A_i^\nu}{A_0^\nu} = \alpha_i \quad (i = 1 , \dots , n) . \tag{8}$$

Remarques.

1° On n'a pas, en général, $\lim_{\nu \to +\infty} (A_i^\nu - \alpha_i A_0^\nu) = 0$;

2° Dans le cas $n = 2$, on montre que $A_i^\nu - \alpha_i A_0^\nu$ est borné.

5. Unicité du développement.

THÉORÈME 3. - Soient

$$(a_1^\nu , \dots , a_n^\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$$
$$(b_1^\nu , \dots , b_n^\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$$

deux tableaux de nombres entiers positifs vérifiant la condition (3). Si on construit, à partir des a_i^ν (resp. b_i^ν), les suites $\{A_i^\nu\}$ (resp. $\{B_i^\nu\}$) par la formule (4), et si on a :

$$\lim_{\nu \to +\infty} \frac{A_i^\nu}{A_0^\nu} = \lim_{\nu \to +\infty} \frac{B_i^\nu}{B_0^\nu} ,$$

alors $a^\nu = b^\nu$ $(i = 1 , \dots , n ; \ \nu \geqslant 0)$.

6. Développement périodique.

(a) Equation caractéristique.

Définition. - On dit qu'un développement est périodique si la suite $(a_1^\nu, \dots, a_n^\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$

est périodique, à partir d'un certain rang λ .

On supposera $\lambda = 0$, et la longueur d'une période k .

Posons $\rho_0 = \alpha_n^0 \dots \alpha_n^{k-1}$, alors

$$(9) \qquad \begin{cases} \rho_0 = \alpha_n^0 \dots \alpha_n^{k-1} = A_0^k + \alpha_1 A_0^{k+1} + \dots + \alpha_n A_0^{k+n} \\ \rho_0 \alpha_i = A_i^k + \alpha_1 A_i^{k+1} + \dots + \alpha_n A_i^{k+n} \end{cases}$$

les équations (9) montrent que ρ_0 est valeur propre de la matrice

$$(A_i^{k+j})_{j=0,1,\dots,n,i=0,1,\dots,n}$$

et que $(1 , \alpha_1 , \dots , \alpha_n)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre ρ_0 .

ρ_0 vérifie l'équation

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} A_0^k - \rho , A_0^{k+1} , \dots , A_0^{k+n} \\ A_1^k , A_1^{k+1} - \rho , \dots , A_1^{k+n} \\ \dots \\ A_n^k , A_n^{k+1} , \dots , A_n^{k+n} - \rho \end{vmatrix} = 0 ,$$

appelée <u>équation caractéristique</u>.

THÉORÈME 4. - <u>L'équation caractéristique admet au moins une racine positive, sa plus grande racine positive est simple, et c'est</u> ρ_0 .

Soient $g_{\lambda,i}(\rho_0)$ les cofacteurs de la matrice $(A_i^{k+j})_{i,j} - \rho_0 I$, alors le vecteur $(g_{\lambda,0}(\rho_0) , g_{\lambda,1}(\rho_0) , \dots , g_{\lambda,n}(\rho_0))$ est vecteur propre, on a donc

$$(11) \qquad \alpha_i = \frac{g_{\lambda,i}(\rho_0)}{g_{\lambda,0}(\rho)} \quad (i = 1 , \dots , n)$$

et

$$K = \underset{\sim}{Q}(\alpha_1 , \dots , \alpha_n) \subset \underset{\sim}{Q}(\rho_0) .$$

Par (9), on aura l'inclusion en sens inverse, d'où l'égalité

$$(12) \qquad K = \underset{\sim}{Q}(\rho_0) .$$

D'après (10), ρ_0 est une unité de K .

Une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme caractéristique soit irréductible est que $(1 , \alpha_1 , \dots , \alpha_n)$ soient $\underset{\sim}{Q}$-linéairement indépendants.

<u>Remarque</u>. - Dans le cas d'un développement périodique (donc sans interruption), $(1 , \alpha_1 , \dots , \alpha_n)$ ne sont pas toujours $\underset{\sim}{Q}$-linéairement indépendants (voir développement périodique à une seule ligne § 7) sauf pour $n = 2$.

Cas $n = 2$.

$$f(\rho) = \begin{vmatrix} A_0^k - \rho & , & A_0^{k+1} & , & A_0^{k+2} \\ A_1^k & , & A_1^{k+1} - \rho & , & A_1^{k+2} \\ A_2^k & , & A_2^{k+1} & , & A_2^{k+2} - \rho \end{vmatrix} = -\rho^3 + \rho^2(A_0^k + A_1^{k+1} + A_2^{k+2}) + \rho(\ldots) + 1 = 0 ,$$

d'où

$$|\rho_0\ \rho_1\ \rho_2| = 1 , \quad \rho_0 = \alpha_2\ \alpha_2^1 \ldots \alpha_2^{k-1} = A_0^k + \alpha_1\ A_0^{k+1} + \alpha_2\ A_0^{k+2} > 1$$

$$\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 = A_0^k + A_1^{k+1} + A_2^{k+2}$$

$$\rho_1 + \rho_2 = (A_1^{k+1} - \alpha_1\ A_0^{k+1}) + (A_2^{k+2} - \alpha_2\ A_0^{k+2}) .$$

De même,

$$\rho_1^\nu + \rho_2^\nu = (A_1^{\nu k+1} - \alpha_1\ A_0^{\nu k+1}) + (A_2^{\nu k+2} - \alpha_2\ A_0^{\nu k+2}) ,$$

d'où

$$|\rho_1^\nu + \rho_2^\nu| < \text{Cte} , \quad \forall\ \nu \quad \text{et} \quad |\rho_1\ \rho_2| < 1 ,$$

ce qui entraîne

$$|\rho_1| \quad \text{et} \quad |\rho_2| < 1 .$$

(b) Degré d'approximation par les "réduites".

THÉORÈME 5 (PERRON). - Soient $\rho_0 , \rho_1 , \ldots , \rho_n$ les racines de l'équation caractéristique, et $|\rho_1| = \max_{i=1,\ldots,n} |\rho_i|$, alors on a

$\exists\ C , \forall\ \varepsilon > 0 , \forall\ \nu \geqslant 0 , \forall\ \lambda = 0 , 1 , \ldots , k - 1 ;$

$$|A^{\nu k+\lambda} - \alpha_i\ A^{\nu k+\lambda}| < C|\rho_1|^\nu\ (1 + \varepsilon)^\nu \quad (i = 1 , \ldots , n) .$$

Par contre, pour au moins un des nk couples (i , λ) , il existe une constante C' telle que l'inégalité suivante

$$|A_i^{\nu k+\lambda} - \alpha_i\ A_0^{\nu k+\lambda}| > C'|\rho_1|^\nu$$

soit vérifiée pour une infinité de valeurs de ν .

COROLLAIRE 1. - Si le développement est périodique, $(\lim_{\nu \to +\infty}(A_i^\nu - \alpha_i\ A_0^\nu) = 0)$ $\Longleftrightarrow$ (l'équation caractéristique est irréductible et admet un nombre de Pisot pour racine).

COROLLAIRE 2. - Si le polynôme caractéristique est irréductible et admet un nombre de Pisot pour racine, alors les suites

$$\left\{ \begin{matrix} A_i^{\nu k+\lambda} \\ \ldots \\ A_0^{\nu k+\lambda} \end{matrix} \right\}_\nu \quad (i = 1 , \ldots , n)$$

sont des approximations rationnelles simultanées régulièrement réparties.

Si on examine sous quelles conditions on a l'approximation

$$|A_i^\nu - \alpha_i A_0^\nu| < C(A_0^\nu)^{1/n} \quad (\nu \geqslant 0) \quad (i = 1 , \ldots , n) ,$$

on montre que celle-ci n'est possible que dans les cas $n = 1$ et $n = 2$, avec la condition restrictive que les conjugués de α_1, α_2 soient complexes.

7. Développement périodique à une seule ligne.

Soient $(a_1 , a_2 , \ldots , a_n)$ des entiers positifs vérifiant la condition $(a_n , a_{n-1} , \ldots , a_{n-i}) \geqslant (a_i , a_{i-1} , \ldots , a_1 , 1)$; $i = 0 , 1 , \ldots , n - 1$ $(a_0 = 1)$ ($\geqslant$ notant ici l'ordre lexicographique).

Les n nombres réels $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n$ admettent le développement purement périodique à une seule ligne $(a_1 , \ldots , a_n)$ si, et seulement si, les nombres α_i sont donnés par les égalités :

$$(13) \qquad \begin{cases} \alpha_n = \rho_0 \\ \alpha_{n-1} = \rho_0^2 - a_n \rho_0 \\ \ldots \\ \alpha_1 = \rho_0^n - a_n \rho_0^{n-1} - \ldots - a_2 \rho_0 \end{cases}$$

où ρ_0 est la racine positive de l'équation

$$(14) \qquad f(\rho) = \rho^{n+1} - a_n \rho^n - \ldots - a_1 \rho - 1 = 0 .$$

Si, de plus, $a_n > a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + 1$ alors la racine positive ρ_0 de l'équation (14) est un nombre de Pisot, et $f(\rho)$ est irréductible sur $\underset{\sim}{Q}$.

8. Développement périodique à $n + 1$ lignes.

Soit l'équation

$$(15) \qquad g(x) = x^{n+1} - a_n x^n - \ldots - a_1 x - \frac{a_0}{b_0} = 0$$

où les nombres a_i $(i = 0 , 1 , \ldots , n)$ et b_0 sont des entiers positifs tels que :

$$a_0 | a_i \quad (i = 1 , \ldots , n) \quad \text{et} \quad (a_0 , b_0) = 1 .$$

Posons $c_0 = a_0/b_0$. Soit α la racine positive de l'équation $g(x) = 0$, et considérons les n nombres

$$(16) \qquad \begin{cases} \alpha_n = \alpha \\ \alpha_{n-1} = \alpha^2 - a_n \alpha \\ \ldots \\ \alpha_1 = \alpha^n - a_n \alpha^{n-1} - \ldots - a_2 \alpha \end{cases}$$

alors, dans les deux cas suivants

$$(\alpha)\quad c_0 > 1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_n > a_i \\ a_n > c_0 \end{cases} \quad (i = 1 , \dots , n) ,$$

$$(\beta)\quad c_0 < 1 \quad \text{et} \quad c_0\, a_n \geqslant a_i + 1 \quad (i = 1 , \dots , n) ,$$

le système de nombres $(\alpha_1 , \dots , \alpha_n)$ admet un développement, par l'A. J. P., purement périodique de longueur $n + 1$, la période étant :

$$\begin{bmatrix} a_1 , a_2 , \dots , a_n \\ \frac{a_1}{c_0} , \frac{a_2}{c_0} , \dots , \frac{a_n}{c_0} \\ \qquad\qquad \ddots \\ \frac{a_1}{c_0} , a_2 , \dots , a_n \end{bmatrix}$$

De plus, dans les deux cas

$$(\alpha')\quad c_0 > 1 \quad \text{et} \quad a_n \geqslant a_{n-1} + \dots + a_1 + c_0 + 1$$

$$(\beta')\quad c_0 < 1 \quad \text{et} \quad c_0\, a_n \geqslant a_{n-1} + \dots + a_1 + 2c_0 + 1$$

le polynôme g est irréductible sur $\underset{\sim}{Q}$.

Le polynôme caractéristique du développement est irréductible sur $\underset{\sim}{Q}$, et admet un nombre de Pisot pour racine, il est donné par le déterminant suivant :

$$f(\rho) = \begin{vmatrix} c_0(1 - \rho) , a_1 , a_2 , \dots , a_n \\ a_n\, c_0\, \rho , c_0(1 - \rho) , a_1 , \dots , a_{n-1} \\ \dots \\ a_1\, c_0\, \rho , a_2\, c_0\, \rho , a_3\, c_0\, \rho , \dots , c_0(1 - \rho) \end{vmatrix}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNSTEIN (L.). - Periodical continued fractions for irrationals of degree n by Jacobi's algorithm, J. für reine und angew. Math., t. 213, 1964, p. 31-38.

[2] JACOBI (C. G. J.). - Allgemeine Theorie der Kettenbruchähnlichen Algorithm, in welchen jede Zahl aus drei vorherfehenden gebildet wird, J. für reine und angew. Math., t. 69, 1868, p. 29-64.

[3] PERRON (O.). - Grundlagen für eine theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus, Math. Annalen, t. 64, 1907, p. 1-76.

[4] SCHWEIGER (F.). - Etude métrique de l'A. J. P., Österr. Akad. Wiss, Math. naturw. Klass., Abt. II, t. 173, 1964, p. 59-92.

[5] STENDER (H. J.). - Explizite Bestimmung von Einheiten für einige Klassen algebraischer Zahlkörper, Dissertation Köln Universität, 1970.

Roger PAYSANT - LE ROUX
Université de Caen, UER Sciences
Esplanade de la Paix
14032 CAEN CEDEX

(Texte reçu le 25 juin 1973)