Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Michel Waldschmidt

# Une méthode « élémentaire » dans la théorie des nombres transcendants, II

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 14, n° 2 (1972-1973), exp. n° G5, p. G1-G5

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_2_A12_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de théorie des nombres)
14e année, 1972/73, n° G5, 5 p.



27 novembre 1972

# UNE MÉTHODE "ÉLÉMENTAIRE" DANS LA THÉORIE DES NOMBRES TRANSCENDANTS, II.

par Michel WALDSCHMIDT

Dans un premier exposé [3], nous avons démontré un théorème de Gel'fond et Scheider sur la transcendance de $a^b$, en nous restreignant au cas réel. Nous nous proposons de démontrer, dans le cas réel, une généralisation de ce théorème, due à BAKER [1] :

THÉORÈME. - Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ des nombres algébriques, réels, positifs, multiplicativement indépendants sur $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}$. Soient $\beta_0, \ldots, \beta_m$ des nombres algébriques réels non tous nuls. Alors on a

$$\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \ldots + \beta_m \log \alpha_m \neq 0 .$$

Des nombres complexes non nuls $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sont multiplicativement indépendants sur $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}$ si l'équation

$$\alpha_1^{\lambda_1} \ldots \alpha_m^{\lambda_m} = 1 ,$$

n'admet que la solution triviale $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = (0, \ldots, 0)$ dans $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}^m$. Pour des nombres réels positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, il est équivalent de dire que les nombres $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_m$ sont $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants. On peut donc énoncer le théorème de la manière suivante : si $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sont des nombres algébriques réels positifs, et si les nombres $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_m$ sont $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants, alors les nombres

$$1 , \log \alpha_1 , \ldots , \log \alpha_m$$

sont $(\overline{\underset{\sim}{\mathbb{Q}}} \cap \underset{\sim}{\mathbb{R}})$-linéairement indépendants.

Quand on choisit $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = a^b$, $\beta_1 = b$, $\beta_2 = -1$, on en déduit le théorème de Gel-fond-Schneider [3] :

COROLLAIRE 1. - Si a et b sont deux nombres réels algébriques, avec b irrationnel et $a > 0$, $a \neq 1$, alors le nombre $a^b$ est transcendant.

On obtient aussi, en considérant les nombres $\beta_0 = \alpha$, $\beta_1 = -1$, $\alpha_1 = e^\alpha$, le cas réel du théorème de Hermite-Lindemann sur la transcendance de $e^\alpha$ :

COROLLAIRE 2. - Si $\alpha$ est un nombre algébrique réel non nul, alors $e^\alpha$ est transcendant.

D'autres corollaires sont exposés dans [1] et [2].

Démonstration du théorème. - Supposons que la conclusion soit fausse ; quitte à

diviser tous les $\beta_i$ par l'un d'eux (puisqu'ils ne sont pas tous nuls), on peut supposer $\beta_m = -1$, donc

$$(1) \qquad \log \alpha_m = \beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \ldots + \beta_{m-1} \log \alpha_{m-1} .$$

Soit $K$ le corps obtenu en adjoignant à $\underset{\sim}{Q}$ les $2m$ nombres

$$\alpha_1 , \ldots , \alpha_m , \beta_0 , \ldots , \beta_{m-1} .$$

On note $\Delta$ le plus petit commun multiple des nombres entiers

$$d(\alpha_1) , \ldots , d(\alpha_m) , d(\beta_0) , \ldots , d(\beta_{m-1}) .$$

Soit $N$ un nombre entier assez grand, que l'on choisit divisible par $4^m$. Les lettres $c_1 , \ldots , c_5$ indiqueront des constantes (indépendantes de $N$).

Dans un premier temps, <u>on construit un polynôme non nul</u>

$$P \in K[X_0 , \ldots , X_m] ,$$

<u>de degré, par rapport à</u> $X_0$ (<u>resp.</u> $X_1 , \ldots , X_m$), <u>inférieur à</u> $2N^{2m}$ (<u>resp.</u> $N^{2m-1}$) <u>tel que la fonction</u>

$$F(x) = P(x , \alpha_1^x , \ldots , \alpha_m^x)$$

<u>vérifie</u>

$$(2) \qquad \frac{d^s}{dx^s} F(x) = 0 \quad \underline{\text{pour}} \quad x = 1 , \ldots , N^m , \quad s = 0 , \ldots , N^{2m-1} .$$

Quand on écrit $(d^s/dx^s)\, F(x)$ pour $x \in \underset{\sim}{Z}$, on obtient un polynôme de degré total inférieur ou égal à $s$ en $\log \alpha_1 , \ldots , \log \alpha_m$, dont les coefficients sont dans $K$. On remplace alors $\log \alpha_m$ par $\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \ldots + \beta_{m-1} \log \alpha_{m-1}$ en vertu de (1), et on trouve ainsi un polynôme de degré total inférieur ou égal à $s$ en $\log \alpha_1 , \ldots , \log \alpha_{m-1}$.

Pour résoudre (2), il suffit que l'on annule chacun des coefficients de ces polynômes pour les valeurs correspondantes de $x$ et $s$. On obtiendra ainsi un système d'équations linéaires homogènes, dont les inconnues sont les coefficients de $P$.

Écrivons pour cela le polynôme $P$ sous la forme

$$P(X_0 , \ldots , X_m) = \sum_{(\lambda)} p(\lambda)\, X_0^{\lambda_0} \ldots X_m^{\lambda_m} ,$$

avec $(\lambda) = (\lambda_0 , \ldots , \lambda_m)$, $0 \leqslant \lambda_0 < 2N^{2m}$, $0 \leqslant \lambda_j < N^{2m-1}$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$. Ainsi la fonction $F$ s'écrit

$$(3) \qquad F(x) = \sum_{(\lambda)} p(\lambda)\, x^{\lambda_0} \exp((\lambda_1 \log \alpha_1 + \ldots + \lambda_m \log \alpha_m)x) ,$$

ou encore, compte tenu de (1),

$$(4) \qquad F(x) = \sum_{(\lambda)} p(\lambda)\, x^{\lambda_0} \exp[\lambda_m \beta_0 + \sum_{j=1}^{m-1} (\lambda_j + \lambda_m \beta_j) \log \alpha_j]x ,$$

grâce à cette relation (4), on peut écrire les dérivées de $F$ sous la forme

$$(5) \qquad \frac{d^s}{dx^s} F = \sum_{\sigma_0 + \ldots + \sigma_{m-1} = s} \frac{s!}{\sigma_0! \ldots \sigma_{m-1}!} (\log \alpha_1)^{\sigma_1} \ldots (\log \alpha_{m-1})^{\sigma_{m-1}} F_{\sigma_0 , \ldots , \sigma_{m-1}} ,$$

avec

$$F_{\sigma_0,\dots,\sigma_{m-1}}(x) = \sum_{(\lambda)} p(\lambda) \sum_{\mu=0}^{\sigma_0} \frac{\sigma_0!}{\mu!(\sigma_0-\mu)!} \times \frac{\lambda_0!}{(\lambda_0-\mu)!} (\beta_0 \lambda_m)^{\sigma_0-\mu}$$

(6)
$$\times \prod_{j=1}^{m-1} (\lambda_j + \lambda_m \beta_j)^{\sigma_j} x^{\lambda_0-\mu} \alpha_1^{\lambda_1 x} \dots \alpha_m^{\lambda_m x} .$$

On cherche alors à résoudre le système d'équations

$$(7) \quad \Delta^{N^{2m}+mN^{3m-1}} F_{\sigma_0,\dots,\sigma_{m-1}}(x) = 0 , \quad 1 \leqslant x \leqslant N^m , \quad \sigma_j \geqslant 0 , \quad \sigma_0+\dots+\sigma_{m-1} < N^{2m} .$$

C'est un système linéaire homogène en $p(\lambda)$ , de moins de $N^{2m^2+m}$ équations à $2N^{2m^2+m}$ inconnues, à coefficients dans $K$ entiers sur $\underset{\sim}{Z}$ , dont on peut majorer la taille, en utilisant (6), par $c_1 N^{3m-1}$ .

Le lemme de Siegel (voir par exemple [3] lemme 1) permet de trouver des éléments $p(\lambda)$ non tous nuls, entiers de $K$ sur $\underset{\sim}{Z}$ , vérifiant les relations (7), et de taille majorée par

$$(8) \quad \max_{(\lambda)} t(p(\lambda)) \leqslant c_2 N^{3m-1} .$$

La fonction $F$ ainsi construite peut s'écrire, à partir de la relation (3), sous la forme

$$\sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p_j} a_{i,j} x^{i-1} e^{W_j x} ,$$

où $W_1 , \dots , W_q$ sont les nombres

$$\lambda_1 \log \alpha_1 + \dots + \lambda_m \log \alpha_m , \quad 0 \leqslant \lambda_h < N^{2m-1} , \quad 1 \leqslant h \leqslant m ,$$

avec $q = N^{2m^2-m}$ , et où $p_j = 2N^{2m}$ , $1 \leqslant j \leqslant q$ .

D'après le lemme 2 de [3], le nombre de zéros de $F$ dans $\underset{\sim}{R}$ est majoré par $p_1 + \dots + p_q = 2N^{2m^2+m}$ .

Par conséquent, si $N$ est suffisamment grand, il existe deux entiers $s$ , $x$ vérifiant

$$1 \leqslant x \leqslant N^{(5/2)m^2+m} ; \quad 0 \leqslant s < N^{2m}.2^{-(5/2)m^2} , \text{ et } \frac{d^s}{dx^s} F(x) \neq 0 .$$

D'après (5), ceci montre que l'un au moins des nombres

$$F_{\sigma_0,\dots,\sigma_{m-1}}(x) , \quad (1 \leqslant x \leqslant N^{(5/2)m^2+m} , \quad \sigma_0+\dots+\sigma_{m-1} < N^{2m}.2^{-(5/2)m^2}) ,$$

est non nul. Désignons par $\ell$ le plus petit entier tel que l'un des nombres

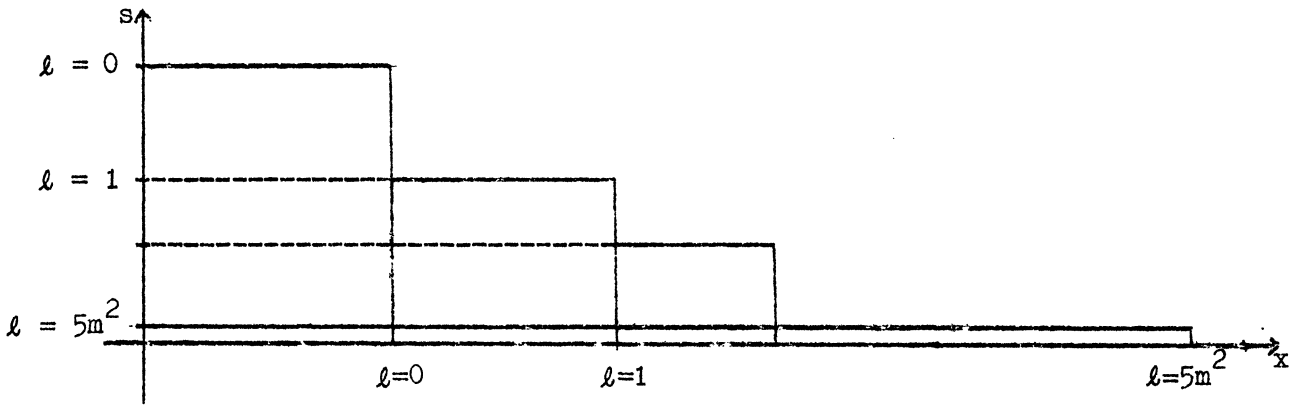
$$F_{\sigma_0,\dots,\sigma_{m-1}}(x) , \quad (1 \leqslant x \leqslant N^{m+(\ell/2)} , \quad \sigma_0+\dots+\sigma_{m-1} < N^{2m}.2^{-\ell})$$

soit non nul, et désignons par $\gamma$ l'un de ces nombres non nul.

Les relations (7) montrent que l'on a $\ell > 0$ , et nous venons de voir que

$$\ell \leqslant 5.m^2 .$$

Les domaines de variations de $s = \sigma_0 + \dots + \sigma_{m-1}$ et $x$ , en fonction de $\ell$ , peuvent se représenter par le schéma suivant




Le nombre $\gamma$ est un élément non nul de $K$ dont on peut facilement majorer la taille, grâce à (6) et (8) :

$$t(\gamma) \leq c_3 . N^{3m+(\ell/2)-1} \log N .$$

Nous allons montrer que $\gamma$ vérifie l'inégalité

$$\log|\gamma| \leq - N^{3m+\{(\ell-1)/2\}} , \tag{9}$$

pour $N$ suffisamment grand. Ainsi, $\gamma$ ne vérifiera pas la relation (0) de [3] :

$$- 2[K:\mathbb{Q}]\, t(\gamma) \leq \log|\gamma| ,$$

bien que $\gamma \in K$ soit non nul ; cette contradiction terminera la démonstration.

Pour obtenir (9), on écrit $\gamma$ sous la forme $F_{\sigma_0,\ldots,\sigma_{m-1}}(x)$ , où $\sigma_0,\ldots,\sigma_{m-1},x$ sont des entiers rationnels vérifiant

$$1 \leq x \leq N^{m+(\ell/2)} \; ; \; \sigma_j \geq 0 \; ; \; \sigma_0 + \ldots + \sigma_{m-1} < N^{2m}\, 2^{-\ell} .$$

D'après le choix de l'entier $\ell$ , on a

$F_{\tau_0,\ldots,\tau_{m-1}}(y) = 0$ pour $1 \leq y \leq N^{m+\{(\ell-1)/2\}}$ , $\tau_j \geq 0$ , et $\tau_0 + \ldots + \tau_{m-1} < N^{2m}\, 2^{-(\ell-1)}$ .

Si on écrit (6) en remplaçant $\alpha_m$ par $e^{\beta_0}\, \alpha_1^{\beta_1} \ldots \alpha_{m-1}^{\beta_{m-1}}$ , comme dans (4), on obtient facilement

$$\frac{d^u}{dx^u} F_{\sigma_0,\ldots,\sigma_{m-1}}$$

$$= \sum_{\mu_0+\ldots+\mu_{m-1}=u} \frac{u!}{\mu_0! \ldots \mu_{m-1}!} (\log \alpha_1)^{\mu_1} \ldots (\log \alpha_{m-1})^{\mu_{m-1}} F_{\sigma_0+\mu_0,\ldots,\sigma_{m-1}+\mu_{m-1}}$$

Par conséquent, la fonction $F_{\sigma_0,\ldots,\sigma_{m-1}}$ admet les zéros $y=1,\ldots,N^{m+\{(\ell-1)/2\}}$ d'ordre au moins égal à $N^{2m}\, 2^{-\ell}$ .

Sur l'intervalle $[0 , N^{m+(\ell/2)}]$ , la fonction $F_{\sigma_0,\ldots,\sigma_{m-1}}$ admet au moins $Q = [N^{3m+\{(\ell-1)/2\}}\, 2^{-\ell}]$ zéros. Or il est facile de majorer $d^Q/dx^Q\, F_{\sigma_0,\ldots,\sigma_{m-1}}$ sur cet intervalle, par

$$\exp[(2m-1) N^{3m+\{(\ell-1)/2\}} \log(c_4 N)] .$$

On utilise alors le lemme 3 de [3] ; on a :

$$|\gamma| \leq \max_{0\leq y\leq N^{m+(\ell/2)}} |F_{\sigma_0,\ldots,\sigma_{m-1}}(y)|$$

$$\leq \frac{N^{(m+(\ell/2))}\, N^{3m+\{(\ell-1)/2\}}}{Q!} \exp[(2m-1)N^{3m+\{(\ell-1)/2\}} \log(c_4 N)]$$

$$\leq \left(\frac{c_5}{N}\right)^{\frac{1}{2}N^{3m+\{(\ell-1)/2\}}} \leq \exp[-N^{3m+\{(\ell-1)/2\}}]$$

dès que $N$ est suffisamment grand. On obtient ainsi la majoration (9), donc aussi le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAKER (Alan). - Linear forms in the logarithms of algebraic numbers, I-IV, Mathematika, t. 13, 1966, p. 204-216 ; t. 14, 1967, p. 102-107, et p. 220-228, t. 15, 1968, p. 204-216.

[2] WALDSCHMIDT (Michel). - Initiation aux nombres transcendants, L'Enseignement mathématique, Genève (à paraître en 1974).

[3] WALDSCHMIDT (Michel). - Une méthode "élémentaire" dans la théorie des nombres transcendants, I., Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 14e année, 1972/73 , Groupe d'étude de théorie des nombres, n° G1, 5 p.

(Texte reçu le 27 juin 1973)

Michel WALDSCHMIDT
Mathématiques, Bât. 425
Université de Paris-Sud
91405 ORSAY