

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

PIERRE KAPLAN

Cycles d'ordre au moins 8 dans le 2-groupe des classes des corps quadratiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, n° 1 (1972-1973),
exp. n° 11, p. 1

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_1_A9_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CYCLES D'ORDRE AU MOINS 8
DANS LE 2-GROUPE DES CLASSES DES CORPS QUADRATIQUES

par Pierre KAPLAN

Il s'agit d'une méthode qui permet d'obtenir de nombreux résultats concernant l'existence de cycles d'ordre au moins 8 dans le 2-groupe (C_2) des classes d'idéaux au sens strict des corps quadratiques $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, où D est un entier quadrat frei. Si $D > 0$ ($\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ réel), on obtient simultanément des résultats concernant la résolubilité des équations "non pelliennes" $x^2 - Dy^2 = d$, où $d \neq 1$ est un diviseur quadrat frei du discriminant de $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$.

Voici un exemple de résultat nouveau obtenu ainsi. $C(m)$ désigne un groupe cyclique d'ordre m , $C(\geq 2^n)$ un groupe cyclique d'ordre 2^k , où $k \geq n$. p désigne un nombre premier.

Il s'agit du cas $D = 2p$, où $p = a^2 + b^2 \equiv 1 \pmod{8}$ avec $b \equiv 0 \pmod{4}$:
 $(C_2) = C(\geq 8)$ si, et seulement si, $a \equiv \pm 1$ et $b \equiv 0 \pmod{8}$. Sinon $(C_2) = C(4)$.

La méthode de démonstration est élémentaire, n'utilise rien d'autre que la théorie des formes quadratiques binaires, et permet de retrouver les résultats nécessaires concernant la réciprocité biquadratique, par exemple la formule :

$$\left(\frac{p}{p'}\right)_4 \left(\frac{p'}{p}\right)_4 = ((aa' + bb')/p) = ((aa' + bb')/p'),$$

où $p = a^2 + b^2 \equiv p' = a'^2 + b'^2 \equiv 1 \pmod{4}$, $(p/p') = 1$ et $b \equiv b' \equiv 0 \pmod{2}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] KAPLAN (P.). - Divisibilité par 8 du nombre des classes des corps quadratiques réels dont le 2-sous-groupe des classes est cyclique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275, 1972, Série A, p. 887-890.
- [2] KAPLAN (P.). - Divisibilité par 8 du nombre des classes des corps quadratiques dont le 2-sous-groupe des classes est cyclique et réciprocité biquadratique, J. math. Soc. Japan, t. 25, 1973, n° 3.
- [3] KAPLAN (P.). - 2-groupe des classes et facteur principal de $\mathbb{Q}(\sqrt{pq})$, où $p \equiv -q \equiv 1 \pmod{4}$, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 276, 1973, Série A, p. 89-92.
- [4] KAPLAN (P.). - Sur le 2-groupe des classes des corps quadratiques, J. für reine und angew. Math. (à paraître).
- [5] KAPLAN (P.). - Cycles d'ordre au moins 16 dans le 2-groupe des classes de certains corps quadratiques (à paraître).

(Texte reçu le 29 mai 1973)