Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Jean-Marc Deshouillers

Problème de Waring avec exposant non entier

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 13, nº 1 (1971-1972), exp. nº 4, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1971-1972__13_1_A3_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
13e année, 1971/72, n° 4, 5 p.

15 novembre 1971

PROBLÈME DE WARING AVEC EXPOSANT NON ENTIER

par Jean-Marc DESHOUILLERS

1. En 1770, WARING a posé le problème de montrer que tout nombre est somme de quatre carrés, neuf cubes,... ; depuis lors, de nombreux auteurs ont étudié ce problème ainsi que diverses généralisations ; nous nous proposons ici d'étudier la suivante.

PROBLÈME. - Soit c un nombre réel supérieur à 1 . Montrer qu'il existe un nombre entier s ne dépendant que de c , tel que tout nombre soit somme d'au plus s nombres de la forme $[n^c]$, n étant un entier.

Conformément à l'usage, nous noterons $g(c)$ le plus petit entier s (s'il existe) tel que la propriété énoncée ci-dessus soit satisfaite, et $G(c)$ le plus petit entier k tel que tout nombre, sauf au plus un nombre fini d'entiers, s'exprime comme somme d'au plus k termes de la forme $[n^c]$.

La bibliographie sur ce sujet particulier semble très restreinte. W. J. ELLISON, qui cite la plupart des articles relatifs au problème de Waring, n'indique qu'un seul article : celui de B. I. SEGAL (1933) qui prouve l'existence de G (et donc de g) en démontrant que

$$G(c) < 2[c + 1]^2\, 2^{[c+1]} .$$

Pour obtenir cette majoration, SEGAL montre que, lorsque N est assez grand, on peut trouver $[c + 1]^2\, 2^{[c+1]}$ entiers n_i tels que $N < \sum n_i^c < N + 1$. Cette méthode, dont nous nous inspirerons pour l'étude du problème binaire (i. e. trouver des valeurs de c telles que $G(c) \leqslant 2$), a cependant deux inconvénients :

(i) elle ne permet pas de trouver d'estimation asymptotique du nombre $r_{s,c}(N)$ de représentations de l'entier N comme somme de s nombres $[n^c]$; elle fournit cependant l'ordre de grandeur exact ;

(ii) nous ne pensons pas qu'elle permette d'atteindre un résultat aussi précis que notre théorème 3 $(G(c) \ll c \log c)$.

2. Au cours de notre travail, nous avons développé une méthode permettant d'estimer certaines sommes trigonométriques, dont nous allons dire un mot maintenant ; f et g étant deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nous avons eu à considérer la somme $S = \sum_n^* e(f(n))$, $1 \leqslant n \leqslant X$, où $e(u) = e^{2i\pi u}$, et où l'astérisque

indique que l'on n'effectue la sommation que sur les entiers n compris entre 1 et X , tels que $\{g(n)\}$ (1) appartient à un certain sous-intervalle I de l'intervalle $[0\ ,\ 1[$. Appelons φ_I la fonction périodique de période 1 qui vaut 1 sur I , et 0 sur $[0\ ,\ 1[\ -\ I$; on peut écrire :

$$S = \sum_{n=1}^{X} e(f(n))\ \varphi_I\ (g(n))\ .$$

On développe alors φ_I en série de Fourier : $\varphi_I(u) = \sum_{q\in \mathbb{Z}} c_q\ e(qu)$, et on obtient alors :

$$S = \sum_{n=1}^{X} e(f(n)) \sum_{q\in \mathbb{Z}} c_q\ e(qg(n)) = \sum_{q\in \mathbb{Z}} c_q \sum_{n=1}^{X} e(f(n) + qg(n))\ ,$$

les sommes trigonométriques S_q (définies par $S_q = \sum_{n=1}^{X} e(f(n) + qg(n))$) sont alors évaluées classiquement. En fait, on n'utilisera pas la fonction φ_I , car la famille des c_q n'est pas sommable, mais on prendra une fonction continue qui ne diffère de φ_I que sur deux petits intervalles autour des extrémités de I , l'erreur ainsi commise étant majorée à l'aide du résultat classique d'ERDÖS-TURÁN (forme finie du critère de Weyl). Les calculs étant irréalisables dans le cas général, nous n'avons étudié qu'un cas particulier très important (dans la démonstration de la proposition 2 du n° 5).

Le problème binaire pourrait être traité sur la même ligne ; il est cependant plus agréable d'utiliser le théorème de Koksma, version multi-dimensionnelle du théorème d'Erdös-Turán.

3. Autant il est facile de constater que $G(c) \geqslant [c + 1]$ lorsque c n'est pas entier (presque aucun nombre ne s'écrit $[n_1^c] + \dots + [n_s^c]$ si $s \leqslant [c]$), autant il est malaisé de déterminer la valeur exacte de $G(c)$. Contrairement à ce qui se passe lorsque c est un nombre entier, il semble que $G(c)$ soit toujours égal à $[c + 1]$; en effet, les seules raisons qui font, dans le cas classique, que $G(k)$ est supérieur à $k + 1$ sont des raisons de congruence (par exemple : toute puissance quatrième est congrue à 1 modulo 16, et donc $G(4) \geqslant 15 > 4 + 1$) (2) ; en revanche, dans notre problème, les suites $[n^c]$ sont équiréparties modulo les entiers.

Nous n'avons pu démontrer que $G(c) = [c + 1]$ que dans un seul cas : lorsque c est compris entre 1 et $4/3$, ce qui nous semble cependant intéressant, d'une part pour le résultat lui-même, d'autre part parcequ'il s'agit d'un problème binai-

(1) $\{u\}$ désigne la partie fractionnaire du nombre réel u .

(2) on sait en fait que $G(4) = 16$.

re dans lequel la méthode du cercle se révèle inapplicable. Ce résultat est obtenu en combinant la méthode de B. I. SEGAL, la méthode de PJATECKIJ-ŠAPIRO, ainsi que le théorème de Koksma .

On cherche à trouver deux entiers n_1 et n_2 tels que $[n_1^c] + [n_2^c] = N$ (N entier assez grand donné). Pour cela, on remarque qu'il suffit de trouver deux entiers n_1 et n_2 tels que :

$$N + \tfrac{1}{2} < n_1^c + n_2^c < N + 1 \quad \text{et} \quad \{n_1^c\} < \tfrac{1}{2} ,$$

la deuxième condition étant indispensable pour déduire de la première que :

$$[n_1^c] + [n_2^c] = N .$$

Faisons alors parcourir à n_1 l'ensemble $\mathfrak{a}$ des entiers a inférieurs à $N^{1/c}$, tels que $\{a^c\}$ soit inférieur à $\frac{1}{2}$; on cherche à quelle condition il existe un entier n_2 compris entre $(N + \frac{1}{2} + n_1^c)^{1/c}$ et $(N + \frac{1}{2} + n_1^c + \frac{1}{2})^{1/c}$, c'est-à-dire à quelle condition on peut trouver un nombre n_1 dans la suite $\mathfrak{a}$ tel que :

$$\{(N + \tfrac{1}{2} + n_1^c)^{1/c}\}$$

soit très proche de 1 ; cela se ramène à l'étude de l'équirépartition modulo 1 de la suite $(N + \frac{1}{2} + a^c)^{1/c}$, lorsque a appartient à $\mathfrak{a}$; on voit alors comment appliquer notre technique de sommes trigonométriques.

Remarquons que la valeur 4/3 est obtenue de la façon suivante : on démontre que $G(c)$ est égal à 2 sur les intervalles $[1 , \frac{5}{4})$, $[\frac{11}{9} , \frac{17}{13})$, et tous les intervalles de la forme $[\frac{9}{7} , \frac{4.4^n + 1}{3.4^n + 1}[$, n désignant un nombre entier arbitraire.

Toutes les estimations étant effectives, il est possible de déterminer numériquement un nombre c_0 tel que sur l'intervalle $]1 , c_0[$, on ait $g(c) = 2$.

Cette méthode ne semble pas pouvoir se généraliser beaucoup ; les valeurs numériques que nous avons obtenues pour le problème ternaire sont moins bonnes que celles obtenues par la "méthode du cercle", dont nous allons parler maintenant.

4. La première remarque à faire, concernant l'application de la méthode du cercle à notre problème, est que la dissection que nous utilisons est particulièrement simple : du fait que la suite $[n^c]$ est équirépartie modulo les entiers, nous n'avons qu'un seul intervalle fondamental à considérer, autour de 0 ; dans cet intervalle, on remarque que l'on ne commet pas une grande erreur en assimilant $e(\alpha[n^c])$ à $e(\alpha n^c)$, ce qui rend assez aisé le traitement de l'intervalle fondamental.

Les choses se gâtent lorsque l'on aborde l'étude de l'intervalle complémentaire ; afin d'obtenir un résultat intéressant, il faut savoir majorer la somme

$\sum_{n=1}^{X} e(\alpha[n^c])$; cela peut être effectué par notre méthode en procédant comme suit : on découpe l'intervalle $[0\ ,\ 1[$ en k sous-intervalles $I_j (= [\frac{j-1}{k}\ ,\ \frac{j}{k}[)$ et l'on écrit alors :

$$\sum_{n=1}^{X} e(\alpha[n^c]) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1,\{n^c\} I_j}^{X} e(\alpha[n^c]) .$$

On ne commet alors pas une grande erreur en assimilant

$$\sum_{n=1,\{n^c\}\in I_j}^{X} e(\alpha[n^c]) \quad \text{et} \quad e(\frac{-\alpha j}{k}) \sum_{n=1,\{n^c\}\in I_j}^{X} e(\alpha n^c) \ ;$$

cette dernière somme peut alors être majorée par notre méthode.

Nous pouvons ainsi montrer que, lorsque c est supérieur à 12 , on a :

$$G(c) < 4c \log c + O(c \log \log c) \ ;$$

notons que ce résultat est du même ordre de grandeur que la meilleure estimation actuellement connue pour $G(k)$ (k entier) qui est $2c \log c + O(c \log \log c)$ (due à VINOGRADOV).

De la même manière, on peut également trouver, lorsque s est supérieur à $6c^3(\log c + 14)$ une évaluation asymptotique du nombre de représentations de tout entier suffisamment grand, comme somme de s nombres $[n^c]$. Encore une fois, les estimations étant effectives, il est possible de déduire de ce qui précède des renseignements sur la fonction $g(c)$, et montrer que, contrairement à ce qui semble se passer pour les entiers, la fonction g n'est pas croissante.

Cette méthode peut être également appliquée au problème de Waring-Goldbach : il existe un nombre $k(c)$ tel que tout entier suffisamment grand soit somme d'au plus k nombres $[p^c]$, p étant un nombre premier.

5. Nous indiquerons dans cette section les principaux résultats obtenus (pour le détail des calculs, nous renvoyons le lecteur aux chapitres II et III de notre thèse).

5.a. Problème binaire : c désignera ici un nombre réel compris entre 1 et $4/3$; on posera $\gamma = \frac{1}{c}$.

PROPOSITION 1. - Soit X un nombre réel suffisamment grand ; il existe un entier positif n inférieur à X^γ tel que :

(i) $$1 - \frac{1}{4} X^{\gamma-1} \leqslant \{(X - n^c)^\gamma\} < 1 \ ;$$

(ii) $$\{n^c\} < \frac{1}{2} .$$

On en déduit assez aisément le résultat suivant :

THÉORÈME 1. - Soit c un nombre réel compris entre 1 et $4/3$; on a :

$$G(c) = 2 .$$

5.b. Problème asymptotique : c désignera maintenant un nombre réel non entier supérieur à 12, et γ sera $1/c$; N désignant un nombre réel assez grand, on a :

PROPOSITION 2. - Soit α un nombre réel compris entre $(2c\, N^{c-1})^{-1}$ et $1 - (2c\, N^{c-1})^{-1}$, on a :

$$|\sum_{n=0}^{N} e(\alpha[x^c])| = O(N^{1-\rho}) \text{ , où } \rho^{-1} = 6c^2(\log c + 14) .$$

THÉORÈME 2. - Si ℓ est un entier supérieur à $6c^3(\log c + 14)$, on a :

$$r_{\ell,c}(N) = (\Gamma(1+\gamma))^{\ell}/\Gamma(\ell\gamma)\, N^{\ell\gamma-1} + o(N^{\ell\gamma-1}) .$$

THÉORÈME 3. - $G(c) < 4c(\log c + 0{,}5 \log\log c + 3{,}5)$.

5.c. Problème "universel".

THÉORÈME 4. - La fonction $g(c)$ n'est pas croissante.

(Texte reçu le 15 décembre 1972)

Jean-Marc DESHOUILLERS
Université Bordeaux I
U. E. R. de Mathématiques
351 cours de la Libération,
33402 TALENCE

et

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
17 rue Descartes
75230 PARIS CEDEX 05