

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

GUY TERJANIAN

Propriété Ci revue et généralisée

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 12 (1970-1971), exp. n° 23, p. 1-3

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1970-1971__12__A17_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉ C_i REVUE ET GÉNÉRALISÉE

par Guy TERJANIAN

1. Les généralisations.

En examinant la démonstration de LANG [2], du fait que, si un corps K a la propriété C_i forte, le corps $K(X)$ des fractions rationnelles en une indéterminée sur K a la propriété C_{i+1} forte, on remarque qu'il démontre davantage, à savoir qu'un polynôme à coefficients dans $K[X]$, non nul, sans terme constant, de degré d , dont le nombre des indéterminées est $> d^i$, a un zéro non banal dans l'anneau $K[X]$, et qu'il déduit de cela que $K(X)$ a la propriété C_{i+1} forte. On est ainsi conduit à définir la propriété C_i forte pour les anneaux intègres, et à se poser de nouvelles questions.

La propriété C_i , par rapport à une partie multiplicative de l'ensemble des entiers naturels, a été définie et étudiée par LANG, dans [3], où il montre que cette propriété a un comportement semblable à celui de la propriété C_i ; mais il n'a pas traité complètement le cas $i = 0$. On voit aisément que les corps qui ont la propriété C_0 , par rapport à la partie multiplicative formée des entiers étrangers à p premier, sont ceux dont toute extension finie a pour degré une puissance de p , et les résultats usuels sur les systèmes d'équations s'étendent à ces corps.

Le corps des nombres réels a la propriété C_0 , par rapport à la partie multiplicative des nombres impairs; en cherchant une propriété analogue à la propriété C_i forte pour le corps des nombres réels, on est conduit à la propriété suivante : Tout polynôme à coefficients réels en deux indéterminées, dont toutes les composantes homogènes de degré pair sont nulles, a un zéro réel non banal. Ceci conduit à une généralisation de la propriété C_i forte, où, pour un entier $n \geq 1$, on considère des polynômes de degré étranger à n , et homogènes pour la graduation naturelle de type $\mathbb{Z}/(n)$.

On pose donc les définitions suivantes :

DÉFINITION 1. - Soient K un corps, $i \geq 0$ un nombre réel, et S une partie multiplicative de l'ensemble des entiers naturels ; on dit que K a la propriété C_i^S , si, pour tout s dans S , et pour tout élément f de $K[X_1, \dots, X_n]$, non nul, homogène, de degré s , et tel qu'on ait $n > s^i$, il existe un élément x de K^n , non nul, et tel que $f(x) = 0$.

DÉFINITION 2. - Soient A un anneau intègre, $i \geq 0$ un nombre réel, et $n \geq 1$ un entier ; on dit que A a la propriété C_i^n , si, pour tout entier d étranger à n , et pour tout élément f de $K[X_1, \dots, X_m]$, non nul, homogène pour la graduation naturelle de type $\mathbb{Z}/(n)$, de degré d , et tel qu'on ait $m > d^i$, il existe un élément x de A^m , non nul, et tel qu'on ait $f(x) = 0$.

2. Résultats.

Je donnerai ci-dessous, sans démonstration, quelques résultats ; on trouvera une étude plus complète et les démonstrations dans [5].

THÉORÈME 1.

(i) Soient K un corps ayant la propriété C_i^s , s un élément de S , et $f = (f_i)_{i=1, \dots, r}$ une famille d'éléments de $K[X_1, \dots, X_m]$, tous étant homogènes et de degré s ; alors, si on a $m > rs^i$, f a un zéro non banal dans K .

(ii) Soient A un anneau intègre ayant la propriété C_i^n , mais n'ayant pas la propriété C_0^n , d un entier étranger à n , et $f = (f_i)_{i=1, \dots, r}$ une suite d'éléments de $A[X_1, \dots, X_m]$, tous étant homogènes pour la graduation de type $\mathbb{Z}/(n)$ et de degré d ; alors, si on a $m > rd^i$, f a un zéro non banal dans A .

La conclusion de (ii) est valable pour les corps qui ont la propriété C_0^n .

On sait que les corps algébriquement clos ont les propriétés C_0 et C_0^1 , et que la réciproque est vraie. De même, soient p un nombre premier, et S la partie multiplicative des entiers étrangers à p ; les corps, dont toute extension finie a pour rang une puissance de p , ont les propriétés C_0^s et C_0^p , et réciproquement.

Il est immédiat que, si un anneau intègre A a la propriété C_i^n , son corps des fractions possède cette même propriété.

THÉORÈME 2.

(i) Soient K un corps, L une extension algébrique finie de K ; alors, si K a la propriété C_i^s , L a la propriété C_i^s ; de même, si K a la propriété C_i^n , L a la propriété C_i^n .

(ii) Soient A un anneau intègre ayant la propriété C_i^n , mais non la propriété C_0^n , B un anneau intègre contenant A , et qui soit un A -module libre de rang fini ; alors B a la propriété C_i^n .

THÉORÈME 3.

(i) Soit K un corps ayant la propriété C_i^s ; alors $K(X)$ a la propriété C_{i+1}^s .

(ii) Soit A un anneau intègre ayant la propriété C_i^n , et ayant l'une des deux propriétés suivantes : A est un corps ; A n'a pas la propriété C_0^n ; alors $A[X]$ a la propriété C_{i+1}^n .

3. Remarques.

Il résulte des théorèmes du paragraphe précédent qu'un polynôme, à coefficients dans le corps $R(X)$ des fractions rationnelles en une indéterminée sur le corps des nombres réels, homogène, de degré 9, en 10 indéterminées, a un zéro non banal dans le corps $R(X)$; mais le polynôme $X_1^9 - X(X_2^2 + \dots + X_n^2)^3$ n'a pas de zéro non banal dans $R(X)$; cette remarque montre que les polynômes homogènes et sans terme constant n'ont pas des propriétés parfaitement semblables, néanmoins, j'ignore s'il existe un corps K qui ait la propriété C_i et qui n'ait pas la propriété C_i forte.

Il serait intéressant d'étudier les anneaux intègres qui ont la propriété C_0^1 , afin de savoir s'ils ont les mêmes propriétés que les anneaux qui ont la propriété C_i^1 avec $i > 0$.

Le problème le plus intéressant à étudier me paraît être le suivant : Soit $\mathbb{C}$ le corps de nombres complexes ; on sait, grâce au travail de GREENBERG [1], que le corps $\mathbb{C}(X)$ a la propriété C_1 ; ce corps a-t-il la propriété C_1 forte ? Si oui, l'anneau $\mathbb{C}[[X]]$ a-t-il la propriété C_1^1 (ou C_1 forte, pour employer la terminologie traditionnelle) ? Si oui, l'anneau $\mathbb{C}[[X]]$ posséderait-il une propriété plus forte que la propriété C_1^1 ?

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GREENBERG (J. M.). - Rational points in henselian discrete valuation rings. - Paris, Presses universitaires de France, 1966 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 31, p. 59-64).
- [2] LANG (S.). - On quasi-algebraic closure, Annals of Math., t. 55, 1952, p. 373-390.
- [3] LANG (S.). - The theory of real places, Annals of Math., t. 57, 1953, p. 378-391.
- [4] NAGATA (M.). - Note on a paper of Lang concerning quasi algebraic closure, Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto, Series A : Math., t. 30, 1957, p. 237-241.
- [5] TERJANIAN (G.). - Dimension arithmétique d'un corps (à paraître).

(Texte reçu le 10 mai 1971)

Guy TERJANIAN
53 rue Roger Salengro
92 - ANTONY