Françoise Bertrandias

Γ-extensions et invariants cyclotomiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 12 (1970-1971), exp. n° 21, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1970-1971__12__A15_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
12e année, 1970/71, n° 21, 5 p.

Γ-EXTENSIONS ET INVARIANTS CYCLOTOMIQUES

par Françoise BERTRANDIAS

Les résultats exposés ici ont été obtenus en collaboration avec Jean-Jacques PAYAN.

1. Groupes θ_K et ψ_K .

Suivant IWASAWA [3] , on appelle Γ-extension d'un corps K une extension de K définie comme réunion croissante d'une famille d'extensions cycliques de degré p^n de K $(n = 1 , 2 , \ldots)$; p est un nombre premier fixé, qu'on supposera par la suite différent de 2 .

Soient $(L_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ N Γ-extensions d'un corps K ; on dit qu'elles sont indépendantes sur K si, pour tout i , $2 \leqslant i \leqslant N$, $L_1 \circ L_2 \circ \ldots \circ L_{i-1} \cap L_i = K$. Il est clair que N Γ-extensions sont indépendantes sur K si, et seulement si, les N extensions intermédiaires de degré p sur K le sont.

Supposons alors que K est de caractéristique différente de p , et contient le groupe μ_p des racines p-ièmes de 1 . On sait (théorie de Kummer) que toute extension cyclique de degré p de K est de la forme $K(\alpha^{1/p})$, avec $\alpha \in K^* \setminus K^{*p}$. Il est alors naturel, pour l'étude des Γ-extensions de K , d'introduire la définition suivante :

DÉFINITION 1. - $\theta_K = \{\alpha \in K^* \mid K(\alpha^{1/p})$ se plonge dans une Γ-extension de $K\}$.

On montre facilement que θ_K (s'il n'est pas vide) est un sous-groupe de K^* , et que K n'a qu'un nombre fini de Γ-extensions indépendantes si, et seulement si, θ_K/K^{*p} est un groupe fini ; de plus, $\dim_{\mathbb{F}_p}(\theta_K/K^{*p})$ est alors le nombre maximum N de Γ-extensions indépendantes de K . (Exemple : K corps local ou corps de nombres.)

Une condition nécessaire pour qu'une extension cyclique de degré p de K se plonge dans une Γ-extension est qu'elle se plonge, pour tout entier n , dans une extension cyclique de degré p^n de K . Ceci amène à la définition suivante.

DÉFINITION 2. - $\psi_K = \{\alpha \in K^* \mid$ pour tout entier $n \geqslant 2$, $K(\alpha^{1/p})$ se plonge dans une extension cyclique de degré p^n de $K\}$.

ψ_K est évidemment un sous-groupe de K^* contenant θ_K. On peut se demander si $\theta_K = \psi_K$; c'est vrai, par exemple, si K est une extension finie du corps $\mathbb{Q}_\ell$ des nombres ℓ-adiques (on le montre en remarquant que, n étant fixé, K n'a qu'un nombre fini d'extensions cycliques de degré p^n). Cependant, on verra (§ 4) des exemples avec $\theta_K \neq \psi_K$.

Dans toute la suite, on donnera, sans démonstration, l'énoncé des principaux résultats obtenus.

2. Normes cyclotomiques.

Dans ce § 2, on fait les hypothèses suivantes sur K : K est de caractéristique différente de p ; il existe un entier $m \geqslant 1$, tel que K contienne le groupe μ_{p^m} des racines p^m-ièmes de 1, et ne contienne pas le groupe $\mu_{p^{m+1}}$ des racines p^{m+1}-ièmes de 1.

Notation. - n étant un entier, K_n désigne le corps des racines p^n-ièmes de 1 au-dessus de K.

On démontre, en utilisant des techniques de la théorie de Kummer (cf. [2]) la proposition suivante.

PROPOSITION 2.1. - Soit $\alpha \in K^*$; $K(\alpha^{1/p})$ se plonge dans une extension cyclique de degré p^n de K si, et seulement si, $\alpha \in K^{*p} N_{K_n|K}(K_n^*)$.

D'où immédiatement le corollaire ci-dessous.

COROLLAIRE. - $\psi_K = \bigcap_{n>m} K^{*p} N_{K_n|K}(K_n^*)$.

On en déduit une autre expression de ψ_K comme intersection de groupes de normes.

PROPOSITION 2.2. - $\psi_K = \bigcap_{n\geqslant m} N_{K_{n+1}|K_n}(K_{n+1}^*)$.

C'est cette dernière expression qui permettra d'étudier ψ_K lorsque K est un corps de nombres (cf. § 3.2).

3. Cas où K est un corps de nombres.

Dans les § 3 et 4, on suppose que K est un corps de nombres contenant le groupe μ_p des racines p-ièmes de 1. L'entier m a la même signification que dans le § 2.

3.1. Le groupe ψ_K a alors les propriétés suivantes.

PROPOSITION 3.1. - Si $\alpha \in \psi_K$, l'extension $K(\alpha^{1/p})|K$ est non ramifiée en dehors de p.

COROLLAIRE. - ψ_K/K^{*p} est un groupe fini.

Ceci permettra de majorer $\dim_{\mathbb{F}_p} \theta_K/K^{*p}$ par $\dim_{\mathbb{F}_p} \psi_K/K^{*p}$.

3.2. Lorsque $K|\mathbb{Q}$ est une extension galoisienne, on peut caractériser ψ_K par des conditions portant sur les complétés $K_{\mathfrak{p}}$ de K pour les idéaux $\mathfrak{p}$ de K divisant p . En utilisant la proposition 2.2, le théorème des normes de Hasse, et la théorie du corps de classes local, on montre le résultat ci-après.

PROPOSITION 3.2. - On suppose que $K|\mathbb{Q}$ est galoisienne, et que, pour tout idéal $\mathfrak{p}$ de K divisant p , $K_{\mathfrak{p}}$ ne contient pas $\mu_{p^{m+1}}$. On a :

$$\psi_K = \{\alpha \in K^* \mid \text{pour tout } \mathfrak{p}|p \text{ , } N_{K_{\mathfrak{p}}|\mathbb{Q}_p}(\alpha) \in p^{\mathbb{Z}}\, U^{(m+1)} \text{ ,}$$

$$\text{et, pour tout } \mathfrak{q} \nmid p \text{ , } p \text{ divise } v_{\mathfrak{q}}(\alpha)\} \text{ .}$$

Notations. - $U^{(m+1)} = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid v_p(x-1) \geqslant m+1\}$; $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ idéaux de $K\}$.

Lorsque le nombre de classes h_K de K est premier à p , on voit facilement que $\psi_K \subset K^{*p} P_K$, où P_K est le groupe des p-unités de K .

La proposition 3.2 a alors le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - On suppose $K|\mathbb{Q}$ galoisienne, et le nombre de classes h_K de K premier à p . $\psi_K \cap P_K$ est le groupe p-unités de K qui sont des normes dans l'extension $K_{m+1}|K$, et on a :

$$\dim_{\mathbb{F}_p}(\psi_K/K^{*p}) = \dim_{\mathbb{F}_p}(\psi_K \cap P_K/P_K^p) \text{ .}$$

3.3. Les résultats ci-dessus fournissent une majoration de $\dim_{\mathbb{F}_p}(\theta_K/K^{*p})$, c'est-à-dire du nombre maximum N de Γ-extensions indépendantes de K .

On sait par ailleurs (théorie du corps de classes, cf. [3]) que $N = n - r_p$, où $n = [K:\mathbb{Q}]$, et r_p est le rang p-adique des unités de K (cf. [3]). On a $1 \leqslant r_p \leqslant r$, où r est le nombre de Dirichlet de K , d'où $n - r \leqslant N \leqslant n - 1$. On conjecture que $r = r_p$ (conjecture de Léopoldt), conjecture démontrée lorsque K est abélien sur $\mathbb{Q}$ ou sur un corps quadratique imaginaire (cf. [1]). En termes de Γ-extensions, une conjecture équivalente est $N = n - r$, ou, lorsque K est totalement imaginaire (comme c'est le cas pour un corps contenant μ_p), $N = r_2 + 1$ où $[K:\mathbb{Q}] = 2r_2$.

La recherche d'exemples de corps K tels que $\theta_K = \psi_K$ permet, comme on le verra au § 4, de donner de nouveaux cas où la conjecture de Léopoldt est vraie.

4. Exemples.

4.1. K corps de nombres contenant μ_p, avec un seul idéal $\mathfrak{p}$ divisant p.

PROPOSITION 4.1. - Soit un corps de nombres K vérifiant les conditions suivantes : K est galoisien sur $\mathbb{Q}$, K contient μ_p, le nombre de classes h_K de K est premier à p, et K possède un seul idéal au-dessus de p. On a :

$$\theta_K = \psi_K = K^{*p}\, P_K .$$

COROLLAIRE. - Si K vérifie les hypothèses de la proposition 4.1, la conjecture de Léopoldt est vraie pour K.

Remarque (due à J.-P. SERRE). - Soit K un corps de nombres contenant μ_p, dont le nombre de classes est premier à p, et possédant un seul idéal $\mathfrak{p}$ au-dessus de p ; soit $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ un système fondamental d'unités de K. Alors, si les entiers $(n_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ ne sont pas tous nuls mod p, l'unité $\varepsilon_1^{n_1} \circ \dots \circ \varepsilon_r^{n_r}$ n'est pas une puissance p-ième dans le complété $K_{\mathfrak{p}}$ de K.

De cette remarque (qui résulte du fait que l'extension

$$K((\varepsilon_1^{n_1} \circ \dots \circ \varepsilon_r^{n_r})^{1/p}) \mid K$$

est nécessairement ramifiée), on déduit facilement la conjecture de Léopoldt pour K, ce qui donne donc une démonstration directe d'un résultat plus précis.

Exemple d'un corps K (possédant un seul idéal $\mathfrak{p}|p$) avec $\theta_K \neq \psi_K$ (cet exemple est dû à J.-P. SERRE). - Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{83}, \sqrt{-3})$, et soit $p = 3$; l'unité fondamentale ε de $\mathbb{Q}(\sqrt{83})$ est donnée par : $\varepsilon = 82 + 9\sqrt{83}$, elle vérifie $\varepsilon \equiv 1\ (9)$ et ceci entraîne : 3 divise le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{-3 \times 83})$ (cf. [4]), d'où : 3 divise h_K (on a $h_K = 12$). On montre facilement que θ_K est engendré modulo K^{*p} par j, $1 - j$ et ε (où j est racine cubique de 1) ; ψ_K est engendré modulo K^{*p} par θ_K et par un élément α de K engendrant un idéal $\mathfrak{a}^3$, où $\mathfrak{a}$ est non principal (par exemple $\alpha = 2(1 + \sqrt{-3 \times 83})$). On vérifie que $\alpha \notin \theta_K$.

4.2. K corps contenant μ_p, avec deux idéaux $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ divisant p. - On suppose de plus : K galoisien sur $\mathbb{Q}$, et p ne divise pas le nombre de classes de K.

On note :

$2r_2 = [K:\mathbb{Q}]$,
k le corps quadratique, corps de décomposition de $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$,
$\mathfrak{p}_k$ et $\mathfrak{p}'_k$ les idéaux de k divisant $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$.

PROPOSITION 4.2. - *Soit* K *un corps de nombres vérifiant les hypothèses ci-dessus, et l'hypothèse suivante* : k *est imaginaire. On note* η *un générateur de* $\mathfrak{p}_k^{h_k}$ (h_k *nombre de classes de* k). *On a* :

$$\dim_{\underset{\sim}{F}_p}(\psi_K/K^{*p}) = \begin{cases} r_2 + 1 & \text{si } \eta^{p-1} \not\equiv 1 \quad (\mathfrak{p}_k'^2) \\ r_2 + 2 & \text{si } \eta^{p-1} \equiv 1 \quad (\mathfrak{p}_k'^2) \end{cases} .$$

COROLLAIRE. - *Soit* K *un corps de nombres vérifiant les hypothèses de la proposition* 4.2, *et tel que* $\eta^{p-1} \not\equiv 1 \quad (\mathfrak{p}_k'^2)$. *Alors la conjecture de Léopoldt est vraie pour* K , *et* $\theta_K = \psi_K$.

Exemple : corps K vérifiant les hypothèses de la proposition 4.2, et pour lequel $\theta_K \neq \psi_K$.

Soit $K = \underset{\sim}{Q}(\sqrt{-11}, \zeta)$, où ζ est racine primitive 5e de 1 , et soit $p = 5$; on montre : 5 ne divise pas h_K , $\underset{\sim}{Q}(\sqrt{-11})$ est le corps de décomposition de 5 , et $\eta^4 \equiv 1 \quad (\mathfrak{p}_k'^2)$. D'où le résultat annoncé.

Lorsque le corps quadratique k est réel, on obtient le résultat suivant.

PROPOSITION 4.3. - *Soit* K *un corps vérifiant les hypothèses du* § 4.2, *et l'hypothèse suivante* : k *est réel. Soit* ε *une unité fondamentale de* k ; *on a*

$$\varepsilon^{p-1} \not\equiv 1 \quad (\mathfrak{p}_k^2) .$$

Si ε *est norme d'une unité de* K , *on a* $\dim_{\underset{\sim}{F}_p}(\psi_K/K^{*p}) = r_2 + 1$; *la conjecture de Léopoldt est alors vraie pour* K , *et* $\theta_K = \psi_K$. *Cette condition est réalisée en particulier si* p^m *ne divise pas l'indice de ramification de* p *dans* K .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRUMER (A.). - On the units of algebraic number fields, Mathematika, London, t. 14, 1967, p. 121-124.

[2] HASSE (H.). - Invariante Kennzeichnung relativ Abelscher Zahlköper, Abh. Deutscher Akad. Wiss. Berlin, 1947, p. 1-56.

[3] IWASAWA (K.). - Notes d'un Séminaire, tenu à Princeton, en 1966.

[4] SCHOLZ (A.). - Über die Beziehung der klassenzahlen quadratischer Körper zueinander, J. für reine und ang. Math., t. 166, 1932, p. 201-203.

(Texte reçu le 15 juillet 1971)

Françoise BERTRANDIAS
Université scient. et méd. de Grenoble
Institut de Mathématiques pures
Boîte postale 116
38 - SAINT-MARTIN-d'Hères