Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Benali Benzaghou

Anneaux de Fatou

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 10, n° 1 (1968-1969), exp. n° 9, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_1_A9_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
10e année, 1968/69, n° 9

3 février 1969

ANNEAUX DE FATOU

par Benali BENZAGHOU

FATOU a établi que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ est la série de Taylor à l'origine d'une fraction rationnelle $\frac{P(X)}{Q(X)}$ à coefficients rationnels, irréductible, normalisée par $Q(0) = 1$, alors a_n entier rationnel pour tout n implique que $P(X)$ et $Q(X)$ sont à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$, c'est-à-dire que les pôles de la fraction rationnelle sont des inverses d'entiers algébriques (lemme de Fatou ([3])).

Ce résultat a été généralisé dans deux directions :

(a) En prenant $a_n \in \underset{\sim}{Z}$ pour $n \in J \subset \underset{\sim}{N}$, J convenablement choisi (RAUZY [5], [6]) ;

(b) En considérant d'autres anneaux que $\underset{\sim}{Z}$; c'est ainsi que PISOT a montré que le lemme de Fatou s'étendait aux anneaux d'entiers des corps de nombres algébriques ([4]), et DRESS aux anneaux factoriels ([2]).

1. Définitions.

1° Soit L un corps commutatif ; $f(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} \in L(X)$ sera dite normalisée si $\deg P < \deg Q$, P et Q sont premiers entre eux, $Q(0) = 1$; une telle représentation normalisée est unique.

Nous associons à $f(X)$ normalisée sa série de Taylor à l'origine $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, à coefficients dans L . Si

$$Q(X) = 1 - q_1 X - \dots - q_h X^h ,$$

alors

$$a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \dots + q_h a_n , \qquad \text{pour tout } n ,$$

et

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} P_i(n) \alpha_i^n ,$$

où les α_i sont les zéros du polynôme

$$Q^*(X) = X^h - q_1 X^{h-1} - \dots - q_h ;$$

L_1 étant l'extension de L par ces α_i , $P_i(X) \in L_1[X]$, et, m_i étant l'ordre de multiplicité de α_i , $\deg P_i = m_i - 1$.

2° Soient A un anneau commutatif unitaire intègre, K son corps des quotients. A est un anneau de Fatou s'il satisfait à la propriété suivante :

Pour toute fraction rationnelle normalisée $\frac{P(X)}{Q(X)}$ de $K(X)$, de série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$,

$$a_n \in A \text{ pour tout } n \implies Q(X) \in A[X] .$$

Notons qu'il en résulte que :

- $P(X) \in A[X]$,
- Les pôles de $\frac{P(X)}{Q(X)}$ sont des inverses d'entiers algébriques sur A .

3° A étant un anneau commutatif unitaire intègre, nous définissons

$$\mathcal{R}(A) = \{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n , \quad a_n \in A , \quad \exists\, q_1 , \ldots , q_h \in A , \quad q_h \neq 0 ,$$
$$\text{tels que} \quad a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \ldots + q_h a_n \quad \text{pour tout } n \text{ et } \Delta \neq 0 \} ,$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{h-1} \\ \vdots & & & \\ a_{h-1} & & \cdots & a_{2h-1} \end{vmatrix} .$$

Cette condition signifie que la récurrence écrite est la "plus courte".

Lorsque K est un corps commutatif, $\mathcal{R}(K)$ est une K-algèbre (pour le produit de Hadamard et la somme ordinaire) (voir [1]).

Lorsque K est le corps des quotients de A , nous définissons

$$\mathcal{R}(A , K) = \{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K) , \quad a_n \in A \text{ pour tout } n \} ;$$

$\mathcal{R}(A , K)$ est une sous-A-algèbre de $\mathcal{R}(K)$, et

$$\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(A , K) .$$

PROPOSITION 1.

(a) Lorsque A est intégralement clos, $\mathcal{R}(A)$ est une A-algèbre de Hadamard.

(b) A est un anneau de Fatou $\iff \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A, K)$.

Par définition même, $\mathcal{R}(A, K) \subset \mathcal{R}(A)$ lorsque A est un anneau de Fatou, d'où (b).

Soient $\mathfrak{a} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(A)$, $\mathfrak{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \in \mathcal{R}(A)$. En nous plaçant dans une extension algébrique L du corps des quotients K de A,

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} P_i(n)\, \alpha_i^n \ ; \qquad b_n = \sum_{i=1}^{r} Q_i(n)\, \beta_i^n \ ;$$

et soient

$$c_n = a_n + b_n , \qquad d_n = a_n b_n .$$

La récurrence entre les c_n est donnée par un polynôme

$$Q_1(X) = \prod_i (1 - \alpha_i X)^{m_i'} \prod_j (1 - \beta_j X)^{m_j''} ,$$

donc à coefficients entiers algébriques sur A ; comme $Q_1(X) \in K[X]$ et que A est intégralement clos, $Q_1(X) \in A[X]$.

Le raisonnement sur d_n est analogue.

4° Soient L un corps commutatif, A un sous-anneau de L. A est un L-anneau de Fatou s'il satisfait à la propriété suivante :

Pour toute fraction rationnelle normalisée $\frac{P(X)}{Q(X)}$ de $L(X)$, de série de Taylor à l'origine $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$,

$$a_n \in A \ \text{pour tout}\ n \implies Q(X) \in A[X] .$$

Nous déduisons de cette définition les propriétés suivantes :

(a) Si L_1 est un sous-corps de L, et A un sous-anneau de L_1 :
A est un L-anneau de Fatou $\implies A$ est un L_1-anneau de Fatou ;

(b) Tout L-anneau de Fatou est un anneau de Fatou ;

(c) Tout anneau de Fatou est un L-anneau de Fatou, pour toute extension algébrique L de son corps des quotients.

Soient L une extension algébrique de degré fini de K, et N l'application norme de L dans K.

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = \frac{P(X)}{Q(X)} \in L(X)$. Soit

$$Q'(X) = NQ(X) \in K[X] \qquad \text{et} \qquad \sum_n a_n X^n = \frac{P'(X)}{Q'(X)} .$$

Remarquons que $a_n \in K$ pour tout n implique alors que $P'(X) \in K[X]$. Soit $\frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$ la représentation normalisée de $\frac{P'}{Q'}$ dans $K(X)$, c'est encore la représentation normalisée dans $L(X)$, d'où $Q = Q_1$ et $P = P_1$.

Comme $a_n \in A$ pour tout n ==> $Q_1(X) \in A[X]$, A est bien un L-anneau de Fatou.

Si L est une extension algébrique quelconque de K , pour chaque fraction rationnelle nous pouvons nous ramener au cas d'une extension de degré fini.

2. Propriétés.

PROPOSITION 2. - Soient L un corps commutatif, $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille de sous-anneaux de L , $A = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$. Si chaque A_α est un anneau de Fatou, alors A est un anneau de Fatou.

Soient K le corps des quotients de A , K_α celui de A_α ; soit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = \frac{P(X)}{Q(X)} \in K(X) \quad ,$$

normalisée, avec $a_n \in A$ pour tout n . Alors pour chaque α , $Q(X) \in A_\alpha[X]$, d'où $Q(X) \in A[X]$.

COROLLAIRE. - Tout anneau commutatif unitaire intègre A possède une enveloppe de Fatou (plus petit anneau de Fatou le contenant).

Il suffit de remarquer qu'un corps commutatif est un anneau de Fatou, et donc que l'ensemble des anneaux de Fatou contenant A n'est pas vide.

PROPOSITION 3. - Un anneau de Fatou est complètement intégralement clos.

Soit $\alpha \in K$ tel qu'il existe $d \in A$, $d \neq 0$ et $d\alpha^n \in A$ pour tout n . Alors $\sum_{n=0}^{\infty} d\alpha^n X^n = \frac{d}{1 - \alpha X}$ est normalisée dans $K(X)$, d'où $1 - \alpha X \in A[X]$.

PROPOSITION 4. - Soient K un corps commutatif, v une valuation non triviale de K , A l'anneau de la valuation. Alors :

A est un anneau de Fatou si, et seulement si, v est de hauteur 1 .

A de Fatou $\Longrightarrow$ A complètement intégralement clos. Or, pour un anneau de valuation :

"complètement intégralement clos" $\Longrightarrow$ "la valuation est de hauteur 1 " ([1]).

Supposons v de hauteur 1, et soit $\hat{K}$ le complété de la clôture algébrique de K muni d'une valuation prolongeant v. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = \frac{P(X)}{Q(X)} \in K(X)$, normalisée. $a_n \in A$, $\forall n \geqslant 0$, entraîne $|a_n| \leqslant 1$, $\forall n \geqslant 0$. Il en résulte que le rayon de convergence de la série est supérieur ou égal à 1, les zéros de $Q(X)$ sont de valeur absolue supérieure ou égale à 1, les coefficients du polynôme réciproque $Q^*(X)$ sont des entiers pour v, donc $Q(X) \in A[X]$.

<u>Remarque</u>. - Si v est de hauteur 1, $\frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in K(X)$, normalisée, alors

$$\overline{\lim} |a_n|^{1/n} \leqslant 1 \Longrightarrow Q(X) \in A[X] .$$

PROPOSITION 5. - <u>Soit K un corps commutatif, et soit A un anneau de K intersection d'anneaux de valuations de K de hauteur 1. Alors A est un anneau de Fatou.</u>

COROLLAIRE 1. - <u>Un anneau de Krull est un anneau de Fatou.</u>

Remarquons que les anneaux principaux, les anneaux de Dedekind et les anneaux factoriels, sont des anneaux de Krull.

COROLLAIRE 2. - <u>Soit A un anneau noethérien. Alors</u> :

A <u>est un anneau de Fatou</u> $\Longleftrightarrow$ A <u>est intégralement clos</u> .

En effet, pour un anneau noethérien,

A intégralement clos $\Longleftrightarrow$ A est un anneau de Krull ([2]) .

PROPOSITION 6. - <u>Soient A un anneau de Fatou, K son corps des quotients, L une extension algébrique de K, A' la fermeture intégrale de A dans L. A' est un anneau de Fatou.</u>

([1]) BOURBAKI (N.). - Algèbre commutative, chap. VI, § 4, prop. 9.
([2]) BOURBAKI (N.). - Algèbre commutative, chap. VII, § 1, n° 3.

LEMME ([4]). - Soient E un anneau commutatif unitaire, intègre, R son corps des quotients,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = \frac{P(X)}{Q(X)} \in \mathcal{R}(E , R) \quad .$$

Alors il existe une suite (a'_n) de E vérifiant la même récurrence linéaire que les a_n :

$$a'_{n+h} = q_1 a'_{n+h-1} + \dots + q_h a'_n \quad ,$$

et telle que $a'_0 = a'_1 = \dots = a'_{h-2} = 0$.

$\frac{P(X)}{Q(X)}$ étant normalisée, soit $Q(X) = 1 - q_1 X - \dots - q_h X^h$. Posons

$$b_n = x_1 a_n + x_2 a_{n+1} + \dots + x_h a_{n+h-1} \quad .$$

Comme

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{h-1} \\ \vdots & & \\ a_{h-1} & \dots & a_{2h-1} \end{vmatrix} \neq 0 \quad ,$$

il existe $x_1 , \dots , x_h$ solutions dans K du système obtenu avec

$$b_0 = b_1 = \dots = b_{h-2} = 0 \ , \qquad b_{h-1} = \beta \quad .$$

En multipliant ces x_i par un élément de l'anneau E , nous obtenons

$$a'_n = x'_1 a_n + x'_2 a_{n+1} + \dots + x'_h a_{n+h-1} \quad ,$$

avec

$$a'_0 = \dots = a'_{h-2} = 0 \ , \qquad a'_{h-1} = a \quad .$$

Remarquons que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n X^n = \frac{aX^{h-1}}{Q(X)} \quad .$$

Démonstration de la proposition 6. - Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = \frac{P(X)}{Q(X)} \in L(X)$, normalisée. Il existe une extension de degré fini de K contenant tous les coefficients de P et Q , et donc tous les a_n . Nous pouvons supposer donc, L de degré fini sur K .

(a) Supposons L purement inséparable sur K. Il existe p^e tel que $x^{p^e} \in K$ pour tout $x \in L$.

D'où $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{p^e} X^{np^e} = \frac{P(X)^{p^e}}{Q(X)^{p^e}} \in K(X)$, normalisée,

$$a_n^{p^e} \in A , \quad \forall n \implies Q(X)^{p^e} \in A[X] ,$$

d'où $Q(X) \in A'[X]$.

(b) Supposons L séparable, et soit L_1 l'extension galoisienne qu'elle engendre, $G = \mathrm{Gal}(L_1/K)$. Par le lemme, nous pouvons toujours supposer

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = \frac{aX^{h-1}}{Q(X)} , \qquad a_n \in A' , \quad \forall n .$$

Considérons

$$\prod_{\sigma \in G} (\sum_n \sigma(a_n) X^n) = \sum_n b_n X^n ,$$

$b_n \in A$ pour tout n.

Par ailleurs, $(N(a) X^{d(h-1)})/(\prod_\sigma Q^\sigma(X))$ est normalisée dans $K[X]$ $(d = [L_1 : K])$, d'où $Q_1(X) = \prod_\sigma Q^\sigma(X) \in A[X] \subset A'[X]$.

Il en résulte que $Q(X) \in A'[X]$.

COROLLAIRE. - <u>L'anneau des entiers algébriques (sur $\mathbb{Z}$) est un anneau de Fatou.</u>

Signalons le résultat suivant (RAUZY [7]) :

<u>Soit</u> A <u>un anneau de Fatou muni d'une valeur absolue non triviale, telle que</u> $|\alpha| \geqslant 1$ <u>pour tout</u> $\alpha \in A$, $\alpha \neq 0$. <u>Soient</u> K <u>son corps des quotients, et</u>

$$B = \{P(X) \in K[X] \,/\, P(\alpha) \in A \text{ pour tout } \alpha \in A\} .$$

<u>Alors</u> B <u>est un anneau de Fatou.</u>

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENZAGHOU (Benali). - Sur l'algèbre de Hadamard des fractions rationnelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 9e année, 1967/68, n° 15, 16 p.

[2] DRESS (François). - Famille de séries formelles et ensembles de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 1, 1968, p. 1-44 (Thèse Sc. math. Paris, 1967).

[3] FATOU (P.). - Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math., Uppsala, t. 30, 1906, p. 335-400.

[4] PISOT (C.). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Serie 2, t. 7, 1938, p. 205-248 (Thèse Sc. math. Paris, 1938).

[5] RAUZY (Gérard). - Suites partiellement récurrentes. Applications à la répartition modulo 1 et aux propriétés arithmétiques des fonctions analytiques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, fasc. 1, p. 159-234.

[6] RAUZY (Gérard). - Ensembles arithmétiquement denses, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, 1967, Série A, p. 37-38.

[7] RAUZY (Gérard). - Algébricité des fonctions méromorphes prenant certaines valeurs algébriques, Bull. Soc. math. France, t. 96, 1968, p. 197-208.

(Texte reçu le 5 février 1969)

Benali BENZAGHOU
Maison des Etudiants arméniens
57 boulevard Jourdan
75 - PARIS 14