

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

ELHANAN MOTZKIN

PHILIPPE ROBBA

Ensembles d'analyticité en analyse p -adique

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 10, n° 1 (1968-1969),
exp. n° 8a, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_1_A7_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres »
implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction
pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

27 janvier 1969

ENSEMBLES D'ANALYTICITÉ EN ANALYSE p-ADIQUE

par Elhanan MOTZKIN et Philippe ROBBA

On appelle $\hat{\Omega}_p$ la clôture algébrique du complété du corps des rationnels muni de la valeur absolue p-adique.

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

THÉOREME. - Un ensemble quasi-connexe est un ensemble d'analyticité. Autrement dit, étant donné un ensemble quasi-connexe A, il existe une fonction analytique f sur A qui ne peut être prolongée analytiquement sur aucun ensemble quasi-connexe K contenant A.

Nous allons construire explicitement cette fonction. Mais pour ce faire, il faut d'abord étudier de près la nature des quasi-connexes, ou plutôt de leurs complémentaires. Un ensemble dont le complémentaire est un quasi-connexe sera appelé un c.-q.-c. (complémentaire de quasi-connexe).

Soient A un quasi-connexe, et B son complémentaire. Nous supposons désormais que B est borné, ce que l'on peut toujours obtenir à l'aide d'une inversion puisque A est ouvert.

LEMME 1. - Soit B un c.-q.-c. borné, et soit Δ le plus petit disque fermé contenant B. Soit Δ_0 un des disques intérieurs de Δ . Alors $\Delta_0 \cap B$ est :

- (a) Soit le disque ouvert Δ_0 tout entier,
- (b) Soit un c.-q.-c. contenu dans un disque fermé Δ' de rayon inférieur à celui de Δ_0 ,
- (c) Soit l'ensemble vide.

Il suffit de prouver (b). Or Δ_0 et $\mathbb{C}B$ sont des quasi-connexes d'intersection non vide ; leur réunion est donc un quasi-connexe, donc $\Delta_0 \cap B$ est un c.-q.-c. Maintenant, si $\Delta_0 \cap \mathbb{C}B$ est non vide et différent de Δ_0 , soit a un point de $\Delta_0 \cap \mathbb{C}B$; puisque $\mathbb{C}B$ est quasi-connexe, il existe un nombre fini de rayons exceptionnels $r_1 < \dots < r_n$ tel que B soit contenu dans la réunion des cercles $|X - a| = r_1, \dots, |X - a| = r_n$. Δ est le disque $|X - a| \leq r_n$, Δ_0 le disque $|X - a| < r_n$, donc $\Delta_0 \cap B$ est contenu dans le disque $|X - a| \leq r_{n-1} < r_n$.

LEMME 2. - Soit A un quasi-connexe (dont le complémentaire est borné). Il existe une suite finie ou dénombrable de disques ouverts disjoints $D_k : |x - a_k| < r_k$ contenus dans CA, et une suite finie ou dénombrable de points (b_k) appartenant au complémentaire de la réunion de A et des D_k , tels que, si K est un quasi-connexe contenant A strictement, alors :

(a) Ou bien K intersecte l'un des disques ouverts, D_k par exemple, et alors $A \cup (K \cap D_k)$ est quasi-connexe,

(b) Ou bien K contient un disque D, contenant au moins un des b_k , et tel que $A \cap D \neq \emptyset$.

(Le "ou bien" n'est évidemment pas exclusif.)

Soit Δ le plus petit disque fermé contenant $CA = B$. Si Δ est de rayon nul, il est réduit à un point, et B aussi. On choisit alors ce point qui répond à la question. Si le rayon de Δ ne fait pas partie du groupe des valeurs de $\hat{\Omega}_p$, Δ n'a qu'un disque intérieur coïncidant avec lui, et alors on a $B = \Delta$. On choisit ce disque ouvert qui répond à la question. Si on n'est dans aucun de ces deux cas, soit $\Delta_1, \dots, \Delta_n, \dots$ la famille dénombrable des disques intérieurs de Δ .

Considérons $B \cap \Delta_n$. Si $B \cap \Delta_n = \Delta_n$, Δ_n sera l'un des disques D_k annoncés.

Si $B \cap \Delta_n$ est non vide et différent de Δ_n , on choisit un point β de $B \cap \Delta_n$. On notera qu'il existe alors un m différent de n pour lequel $B \cap \Delta_n$ n'est pas vide.

Soit alors Δ'_n le plus petit disque fermé contenant $B \cap \Delta_n$. On recommence le raisonnement : ou bien Δ'_n est aussi un disque ouvert et $B = \Delta'_n$ sera un des D_k , ou bien Δ'_n se réduit à un point et $B \cap \Delta_n$ est un point qui sera un des b_k , ou bien alors il y a une infinité de disques intérieurs $\Delta_{n_1}, \dots, \Delta_{n_m}$, et on poursuit le raisonnement.

On obtient ainsi une famille finie ou dénombrable de disques ouverts qui sont nos D_k , et une famille finie ou dénombrable de points de CA. La suite (b_k) sera formée de points de cette famille qui n'appartiennent à aucun des D_k .

Soit alors K un quasi-connexe contenant A, et soit x un point de $K \cap CA$. Alors, ou bien x appartient à l'un des D_k et le lemme est prouvé (on vérifie sans peine que $(K \cap D_k) \cup A$ est un quasi-connexe), ou bien x est un des points obtenus lorsque $B \cap \Delta_{n_1, n_2, \dots, n_p}$ était restreint à un point, x appartient à la suite b_k , et un disque de centre x et de rayon assez petit est contenu dans K et intersecte A, ou bien, enfin, x appartient à l'intersection d'une suite infinie de disques ouverts emboîtés $\Delta_{n_1, n_2, \dots, n_p}, \Delta_{n_1, n_2, \dots, n_p, n_{p+1}}$. On notera

$\Delta_{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots}$ l'intersection de ces disques. Alors K doit contenir un disque D de centre x , et contenant tous les Δ_{n_1, \dots, n_p} à partir d'un certain indice n_p , car autrement K ne serait pas quasi-connexe, ce qui achève la démonstration.

LEMME 3. - Soit D le disque ouvert $|X - a| < r$. Il existe une fonction analytique sur $\mathbb{C}D$, f , de module majoré par 1, qui ne peut pas être prolongée analytiquement en dehors de $\mathbb{C}D$.

Soit β_n une suite d'entiers > 0 tels que $\beta_n \rightarrow +\infty$ et $\beta_n/n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Soit α_n une suite d'entiers ≥ 0 tels que $p^{\alpha_n} < r^n \leq p^{\alpha_n+1}$. On pose $c_n = p^{\beta_n - \alpha_n}$, alors $|c_n| = p^{\alpha_n - \beta_n}$.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n/x^n$ converge uniformément pour $|x| \geq r$, puisque

$$|c_n|/|x^n| \leq |c_n|/r^n \leq p^{-\beta_n},$$

et que ce dernier terme tend vers 0 puisque $\beta_n \rightarrow +\infty$.

Mais le rayon de convergence de cette série est r , puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} p^{\alpha_n/n} \times \lim_{n \rightarrow \infty} p^{-\beta_n/n},$$

or

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{\alpha_n/n} = r \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p^{-\beta_n/n} = 1.$$

On sait qu'alors la fonction f , somme de cette série, ne peut pas être prolongée en dehors de $\mathbb{C}D$ ([1]).

De plus, f est majorée en module par 1, puisque chaque terme de la série l'est.

Démonstration du théorème. - Soit donc A un quasi-connexe, avec $B = \mathbb{C}A$ borné. Soient $D_k : |x - a_k| < r_k$, et b_k les disques et les points définis au lemme 2. Soit f_k la fonction associée au disque D_k au lemme 3. Soient α_k et β_k deux suites de nombres p -adiques non nuls, tels que $|\alpha_k|$ et $|\beta_k|$ tendent vers zéro quand k tend vers l'infini, et que l'on ait $|\beta_i| \neq |\beta_j|$ pour $i \neq j$.

On appellera A_ε l'ensemble des points de A qui sont à une distance supérieure à ε du complémentaire de A . Pour tout $\varepsilon > 0$, A_ε est un quasi-connexe et

$$\bigcup_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon = A.$$

La fonction annoncée dans le théorème est la fonction

$$f(x) = \sum_k \alpha_k f_k(x) + \sum_k \beta_k / (x - b_k) .$$

On voit que la première série converge uniformément sur le complémentaire de $\bigcup_k D_k$, donc sur A , et que la deuxième converge uniformément sur l'ensemble E_ε des points x tels que $|x - b_k| > \varepsilon$ pour tout k , donc sur A_ε , et ce quel que soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est donc bien une fonction analytique sur A .

Supposons alors que f se prolonge sur un quasi-connexe K contenant A . Si K intersecte le disque D_m , f se prolonge a fortiori sur le quasi-connexe $A \cup (K \cap D_m)$. La série $\sum_{k \neq m} \alpha_k f_k(x)$ convergeant uniformément sur $\mathbb{C} \cup_{k \neq m} D_k$, définit une fonction analytique sur $A \cup (K \cap D_m)$. De même, la série $\sum_k \beta_k / (x - b_k)$ converge uniformément sur E_{r_m} qui contient D_m , donc cette série définit aussi une fonction analytique sur $A \cup (K \cap D_m)$, donc si f se prolonge sur $A \cup (K \cap D_m)$, la fonction

$$\alpha_m f_m(x) = f(x) - \sum_{k \neq m} \alpha_k f_k(x) - \sum_k \beta_k / (x - b_k)$$

se prolonge aussi sur $A \cup (K \cap D_m)$, ce qui contredit la définition de f_m .

Supposons alors que K ne rencontre aucun des D_k , il contient alors un disque D contenant au moins un b_n et tel que $A \cap D \neq \emptyset$. Alors $A \cup D$ est un quasi-connexe, et si f se prolonge sur K , elle se prolonge a fortiori sur $A \cup D$. D n'intersecte aucun des D_k . Soient $(b_i)_{i \in I}$ les points de la suite b_k qui appartiennent à D . On voit facilement que les séries $\sum_k \alpha_k f_k(x)$ et $\sum_{k \notin I} \beta_k / (x - b_k)$ définissent des fonctions analytiques sur $D \cup A$. Donc si f se prolonge sur $D \cup A$, la fonction

$$g(x) = \sum_{i \in I} \beta_i / (x - b_i) = f(x) - \sum_k \alpha_k f_k(x) - \sum_{k \notin I} \beta_k / (x - b_k)$$

se prolonge sur $D \cup A$. Or, comme cette série converge uniformément sur $E_\varepsilon \cup \mathbb{C}D$, qui est quasi-connexe, et que, pour ε assez petit, E_ε intersecte A , g définit même une fonction analytique sur tout $\hat{\Omega}_p$, y compris le point à l'infini, donc $g(x)$ doit être constante et même nulle puisqu'on voit que $|g(x)| \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow \infty$.

Mais si on effectue le développement en série de Laurent de g pour $|x|$ grand, on trouve que le coefficient du terme $\frac{1}{x}$ est $\sum_{i \in I} \beta_i \neq 0$. On obtient donc une contradiction, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, Colloques internationaux du C. N. R. S. : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres [143. 1964. Clermont-Ferrand], p. 97-141. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1966.

(Texte reçu le 15 juin 1969)

Elhanan MOTZKIN
Département de Mathématiques
Université de Jérusalem
JERUSALEM (Israël)

Philippe ROBBA
216 rue Saint-Jacques
75 - PARIS 05
