

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MARTINE PATHIAUX

## Sur le quotient de Hadamard de deux fractions rationnelles

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 10, n° 1 (1968-1969),  
exp. n° 7, p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1968-1969\\_\\_10\\_1\\_A6\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_1_A6_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres »  
implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>).  
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction  
pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LE QUOTIENT DE HADAMARD DE DEUX FRACTIONS RATIONNELLES

par Martine PATHIAUX

1. Introduction.

Soit  $K$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$ . On considère  $\mathcal{R}(K)$  (voir [1] et [2]), l'algèbre des fractions rationnelles  $A(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , où  $d^\circ P < d^\circ Q$  et  $Q(0) \neq 0$ , et dont le développement en série de Taylor à l'origine est à coefficients dans  $K$ , c'est-à-dire

$$A(z) \in \mathcal{R}(K) \iff A(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in K \quad \text{et} \quad a_n = \sum_{i=1}^k R_i(n) \theta_i^n,$$

où  $\theta_i^{-1}$  pour  $i \in \{1, \dots, k\}$  désignent les zéros de  $Q(z)$ , et où

$$d^\circ R_i = \text{multiplicité de } \theta_i^{-1} - 1.$$

Conjecture : Soit  $K$  une extension algébrique finie de  $\mathbb{C}$ . Soient

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{R}(K), \quad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in \mathcal{R}(K) \quad \text{et} \quad C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

où  $c_n = \frac{a_n}{b_n}$  en convenant que  $c_n = 1$  si  $b_n = a_n = 0$ ; si, quel que soit  $n$ ,  $c_n$  est entier algébrique, alors  $C(z) \in \mathcal{R}(K)$ .

La conjecture est vraie dans certains cas. C. PISOT [7] a démontré le théorème suivant.

THÉOREME 1.1. - Soient

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{R}(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in \mathcal{R}(\mathbb{C}),$$

où  $b_n = \sum_{i=1}^{\ell} Q_i(n) \mu_i^n$ , avec  $|\mu_1| > |\mu_i|$  pour  $i \in \{2, \dots, \ell\}$  et  $d^\circ Q_1 = 0$ ; si  $c_n = \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{Z}$  pour tout  $n$ , alors  $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  est une fraction rationnelle.

D. CANTOR [5] a démontré le théorème ci-après.

THÉOREME 1.2. - Soient

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{R}(\underline{\mathbb{C}}) \quad \text{et} \quad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in \mathcal{R}(\underline{\mathbb{C}}) ,$$

où  $b_n = Q(n)$  ; si  $c_n = \frac{a_n}{b_n}$  est entier algébrique pour tout  $n$  , alors

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{est une fraction rationnelle.}$$

Cet exposé a pour but de démontrer que la conjecture est encore vraie dans le cas suivant.

THÉOREME 1.3. - Soient

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{R}(K) \quad \text{et} \quad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in \mathcal{R}(K) ;$$

si le nombre de pôles distincts de  $B(z)$  est inférieur ou égal à  $2$  , et si  $c_n = \frac{a_n}{b_n}$  est entier algébrique pour tout  $n$  , alors  $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  est une fraction rationnelle.

Notations. - On note  $\Omega_p$  la clôture algébrique de  $\underline{\mathbb{Q}}_p$  , et  $\hat{\Omega}_p$  le complété de  $\Omega_p$  (si  $p = 0$  ,  $\hat{\Omega}_p$  désigne  $\underline{\mathbb{C}}$  ).

Soit  $K$  une extension finie de  $d^0$  s de  $\underline{\mathbb{Q}}$  .

Si  $\alpha \in K$  ,  $\alpha = \alpha^{(1)} , \dots , \alpha^{(i)} , \dots , \alpha^{(s)}$  désignent les conjugués de  $\alpha$  sur  $\underline{\mathbb{Q}}$  , et si  $u_n \in K$  ,  $F^{(i)}(z) = \sum u_n^{(i)} z^n$  pour  $i = 1 , \dots , s$  désignent les conjugués de  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = F_1(z)$  .

La démonstration du théorème 1.1 est basée sur le théorème de BOREL [4]. La démonstration du théorème 1.3 est analogue à celle du théorème 1.1, mais utilise une généralisation du théorème de Borel, due à DWORK [6] (généralisé par la suite par F. BERTRANDIAS [3]), utilisant l'analyse  $p$ -adique. Nous l'énonçons sous cette forme restreinte :

THÉOREME 1.4. - Soient  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$  , où  $u_n$  est un entier algébrique d'une même extension  $K$  de  $d^0$  s , et  $p$  un nombre premier rationnel.

Si les  $F^{(i)}(z)$  , pour  $i \in \{1 , \dots , s\}$  , sont méromorphes dans  $\underline{\mathbb{C}}$  avec un nombre fini de pôles, zéro non compris, dans  $|z| < \rho_{i,0}$  ,

Si les  $F^{(i)}(z)$ , pour  $i \in \{1, \dots, s\}$ , sont méromorphes dans  $\hat{\Omega}_p$  avec un nombre fini de pôles dans  $|z|_p < \rho_{i,p}$ ,

$$\text{Si } \prod_{\substack{i=1, \dots, s \\ j=0, p}} \rho_{i,j} > 1,$$

alors les  $F^{(i)}(z)$ , pour  $i = 1, \dots, s$ , sont des fractions rationnelles.

La démonstration utilise les déterminants de Hankel

$$H_{n,s}^{(i)} = \begin{vmatrix} u_n^{(i)} & \dots & u_{n+s}^{(i)} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n+s}^{(i)} & & u_{n+2s}^{(i)} \end{vmatrix},$$

et les inégalités suivantes

$$\overline{\lim} |H_{n,s}^{(i)}|^{1/n} \leq R_{i,0}^{-h_i} \rho_{i,0}^{-(s+1-h_i)}, \quad \forall s > h_i,$$

où  $R_{i,0}$  désigne le rayon de convergence de  $F^{(i)}(z)$ , et  $h_i$  le nombre de pôles de  $F^{(i)}(z)$  dans  $|z| < \rho_{i,0}$ , et

$$\overline{\lim} |H_{n,s}^{(i)}|_p^{1/n} \leq \rho_{i,p}^{-(s+1-e_i)}, \quad \forall s > e_i,$$

où  $e_i$  désigne le nombre de pôles de  $F^{(i)}(z)$  dans  $|z|_p < \rho_{i,p}$ , et

$$N(H_{n,s}) \times |N(H_{n,s})|_p > 1.$$

## 2. Lemmes.

Notations. - Notons

$$a_n = \sum_{i=1}^k P_i(n) \theta_i^n \quad \text{et} \quad b_n = Q_1(n) \mu_1^n + Q_2(n) \mu_2^n,$$

et  $K$  une extension algébrique de  $d^0$  s contenant tous les  $\theta_i, \mu_j$ , et les coefficients des polynômes  $P_i$  et  $Q_j$ . On peut supposer tous ces nombres entiers algébriques. Dans le cas contraire, on multipliera  $a_n$  et  $b_n$  par le dénominateur de ces nombres, ce qui ne changera pas la forme générale de  $a_n$  et  $b_n$ .

LEMME 2.1. -  $C^{(i)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(i)} z^n$  ont des rayons de convergence  $R_{i,0}$  dans  $\mathbb{C}$  non nuls.

Si  $b_n = 0$ ,  $c_n = 1$ , et si  $b_n \neq 0$ , alors  $N(b_n) \geq 1$  puisque  $b_n$  est entier algébrique. Donc

$$|b_n^{(i)} \prod_{\substack{j \in \{1, \dots, s\} \\ j \neq i}} b_n^{(j)}| \geq 1 .$$

Soit  $R_{i,0}$  le rayon de convergence de  $G^{(i)}(z)$ . On a donc

$$\frac{1}{R_{i,0}} = \overline{\lim} \frac{|a_n^{(i)}|^{1/n}}{|b_n^{(i)}|^{1/n}} \leq \overline{\lim} |a_n^{(i)}|^{1/n} \times \prod_{\substack{j=1, \dots, s \\ j \neq i}} \overline{\lim} |b_n^{(j)}|^{1/n} .$$

En posant

$$\theta = \max_{i=1, \dots, k} |\theta_i| \quad \text{et} \quad \mu = \max(|\mu_1|, |\mu_2|) ,$$

soit

$$\frac{1}{R_{i,0}} \leq \theta \mu^{s-1} .$$

LEMME 2.2. - Si  $|\frac{\mu_1^{(i)}}{\mu_2^{(i)}}| = 1$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, s\}$ , et si  $\frac{\mu_1}{\mu_2}$  est différent d'une racine de l'unité, il existe  $p$  premier rationnel, et  $i \in \{1, \dots, s\}$  tel que

$$|\mu_1^{(i)}|_p \neq |\mu_2^{(i)}|_p .$$

En effet, si  $\frac{\mu_1}{\mu_2}$  est entier algébrique, alors d'après un théorème de Kronecker, si  $|\frac{\mu_1^{(i)}}{\mu_2^{(i)}}| = 1$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, s\}$ ,  $\frac{\mu_1}{\mu_2}$  est racine de l'unité, ce qui est exclu.  $\frac{\mu_1}{\mu_2}$  n'est donc pas entier. Soit  $P(x) = \sum_{i=0}^s \beta_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$  un polynôme primitif de degré  $s$  ayant pour racines  $\frac{\mu_2^{(i)}}{\mu_1^{(i)}}$  pour  $i \in \{1, \dots, s\}$ . Alors

$\beta_0 = \pm \beta_s \neq \pm 1$ . Soit  $p$  un diviseur de  $\beta_0$ ; il existe  $i \in \{1, \dots, s-1\}$  tel que  $p \nmid \beta_i$ , puisque le polynôme est primitif. Le polygone de Newton de  $P(x)$  a donc un côté de pente négative. Il existe donc  $i \in \{1, \dots, s\}$  tel que

$$|\frac{\mu_2^{(i)}}{\mu_1^{(i)}}|_p < 1 .$$

### 3. Démonstration du théorème.

Nous excluons le cas où  $\frac{\mu_1}{\mu_2}$  est racine de l'unité. Dans ce cas, on se ramène au cas de CANTOR.

Posons

$$c_{n,r} = c_n \times Q_1^r(n) \quad \text{et} \quad C_r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,r} z^n .$$

Si pour un  $r$  convenable,  $C_r(z)$  est une fraction rationnelle, le théorème 1.2 permettra d'affirmer que  $C(z)$  l'est aussi.

Remarquons que  $c_{n,r}$  est entier algébrique. D'autre part, le rayon de convergence dans  $\underline{\mathbb{C}}$  de  $C_r^{(i)}(z)$  est supérieur ou égal au rayon de convergence dans  $\underline{\mathbb{C}}$  de  $C^{(i)}(z)$ . En notant  $\rho_{i,j,r}$  (resp.  $R_{i,j,r}$ ) le rayon de méromorphie (resp. convergence) de  $C_r^{(i)}(z)$  dans  $\hat{\Omega}_j$ , où  $j \in J$ ,  $J$  désignant l'ensemble des nombres premiers rationnels, zéro inclus, on a

$$\rho_{i,0,r} \geq R_{i,0,r} \geq \min_{i=1,\dots,s} (R_{i,0}) \neq 0, \quad \text{d'après le lemme 2.1 .}$$

D'autre part, pour  $j \in J$ ,  $j \neq 0$ ,  $\rho_{i,j,r} \geq 1$ . Il existe donc  $A \neq 0$ , indépendant de  $i, j, r$  tels que  $\rho_{i,j,r} \geq A$ . D'après le théorème 1.4, il suffit donc de démontrer qu'il existe  $i \in \{1, \dots, s\}$  et  $j \in J$  tels que  $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_{i,j,r} = +\infty$ .

Or d'après le lemme 2.2, il existe  $p \in J$  et  $i \in \{1, \dots, s\}$  tels que

$|\mu_1^{(i)}|_p \neq |\mu_2^{(i)}|_p$ . Supposons par exemple  $i = 1$  et  $|\frac{\mu_2}{\mu_1}|_p = \omega < 1$ , et montrons que, pour ce  $p$  considéré,  $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_{1,p,r} = +\infty$ . En utilisant l'identité

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \dots + x^{r-1} + \frac{x^r}{1-x},$$

transformons

$$c_{n,r} = a_n \frac{Q_1^r(n)}{Q_1(n) \mu_1^n (1 + \frac{Q_2(n) \mu_2^n}{Q_1(n) \mu_1^n})} = \sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n ,$$

avec

$$t_n = a_n \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i Q_2^{(i)}(n) Q_1(n)^{r-1-i} \mu_2^{ni} \mu_1^{-n(i+1)}$$

et

$$v_n = (-1)^r \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{rn} \frac{Q_2^r(n) a_n}{Q_1(n) \mu_1^n + Q_2(n) \mu_2^n} ;$$

$\sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n$  est une fraction rationnelle. On a donc

$$\frac{1}{\rho_{1,p,r}} \leq \overline{\lim} |v_n|_p^{1/n} \leq \omega^r \overline{\lim} |Q_2(n)^{r/n}|_p \overline{\lim} |c_n|_p^{1/n} \leq \frac{\omega^r}{A},$$

soit

$$\rho_{1,p,r} \geq A\omega^{-r} \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \rho_{1,p,r} = +\infty.$$

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BENZAGHOU (B.). - Sur l'algèbre de Hadamard des fractions rationnelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 9e année, 1967/68, n° 15, 16 p.
- [2] BENZAGHOU (B.). - Sur le quotient de Hadamard de deux fractions rationnelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 10e année, 1968/69, n° 1, 14 p.
- [3] BERTRANDIAS (F.). - Diamètre transfini dans un corps valué. Application au prolongement analytique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 257, 1963, p. 583-585.
- [4] BOREL (E.). - Sur une application d'un théorème de Hadamard, Bull. Sc. math., Série 2, t. 18, 1894, 1re partie, p. 22-25.
- [5] CANTOR (D. G.). - On arithmetic properties of coefficients of rational functions, Pacific J. of Math., t. 15, 1965, p. 55-58.
- [6] DWORK (B. M.). - On the rationality of the zeta function of an algebraic variety, Amer. J. of Math., t. 82, 1960, p. 631-648.
- [7] PISOT (C.). - Sur les fonctions arithmétiques analytiques à croissance exponentielle, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 222, 1948, p. 988-990.

(Texte reçu le 27 janvier 1969)

Mme Martine PATHIAUX  
19 rue de Chartres  
92 - NEUILLY

---