Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Hubert Delange

Sur les fonctions additives à valeurs entières

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 10, nº 1 (1968-1969), exp. nº 5, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_1_A4_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
10e année, 1968/69, n° 5

6 janvier 1969

SUR LES FONCTIONS ADDITIVES À VALEURS ENTIÈRES

par Hubert DELANGE

Un article sur ce sujet doit paraître prochainement dans le "Journal of **Number** Theory".

Aussi, nous donnons seulement ici un résumé de notre exposé.

I

Soit f une fonction arithmétique à valeurs entières, autrement dit, une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Z}$.

Etant donné un entier $q > 1$, nous dirons que f possède une loi de distribution asymptotique modulo q si, pour tout $r \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des $n \in \mathbb{N}^*$, pour lesquels

$$f(n) \equiv r \pmod q \quad ,$$

possède une densité.

Nous dirons que f est uniformément distribuée modulo q (u. d. mod q) si, pour tout $r \in \mathbb{Z}$, l'ensemble considéré ci-dessus possède une densité égale à $\frac{1}{q}$.

Des résultats récents de **WIRSING** concernant les fonctions multiplicatives permettent de traiter le cas où f est additive, c'est-à-dire $f(mn) = f(m) + f(n)$ quand $(m, n) = 1$.

1° Toute fonction additive à valeurs entières possède une loi de distribution asymptotique modulo q pour tout $q > 1$.

2° Soit f une fonction additive à valeurs entières, et soit q un entier > 1.

(a) Si q est impair, une condition nécessaire et suffisante pour que f soit u. d. mod q est que :

Pour tout diviseur premier d de q, $\sum_{d \nmid f(p)} \frac{1}{p} = +\infty$ (la lettre p désignant, comme il est d'usage, un nombre premier).

(b) Si q est pair, pour que f soit u. d. mod q, il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :

(1) Pour tout diviseur premier d de q ; $\sum_{d \nmid f(p)} \frac{1}{p} = +\infty$.

(2) Pour tout diviseur premier $d > 2$ de q , et aussi pour $d = 4$ si $4/q$, $\sum_{d \nmid f(p)} \frac{1}{p} = +\infty$.

En outre, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $f(2^r)$ est un nombre impair.

3° On déduit immédiatement de ce qui précède une condition nécessaire et suffisante pour que f soit u. d. mod q pour tout $q > 1$.

II

1° E étant une partie infinie de $\mathbb{N}^*$, et f étant encore une fonction arithmétique à valeurs entières, on peut définir les propositions suivantes :

" f possède une loi de distribution asymptotique modulo q , quand n parcourt E " ,

et

" f est uniformément distribuée modulo q , quand n parcourt E " .

Pour cela, on considère la densité relative par rapport à E de l'ensemble des $n \in E$ tels que

$$f(n) \equiv r \pmod q \quad .$$

Le problème se traite très bien si, f étant encore additive, E est un ensemble multiplicatif (c'est-à-dire dont la fonction caractéristique est multiplicative) de densité > 0 . (Rappelons qu'un ensemble multiplicatif possède toujours une densité et que celle-ci est > 0 si, et seulement si, $\sum_{p \notin E} \frac{1}{p} < +\infty$.)

Il y a toujours une loi de distribution asymptotique modulo q .

Si E contient toutes les puissances de 2 , les conditions nécessaires et suffisantes pour que f soit u. d. mod q sont exactement les mêmes que plus haut.

Si E ne contient pas toutes les puissances de 2 , on a pour tous les $q > 1$ la même condition que plus haut pour q impair.

2° Au lieu d'une seule fonction arithmétique à valeurs entières et un seul entier $q > 1$, on peut considérer par exemple un couple $[f , g]$ de telles fonctions et un couple $[q , q']$ d'entiers > 1 .

On dira que le couple $[f , g]$ possède une loi de distribution asymptotique modulo $[q , q']$ si, quels que soient r et $r' \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des $n \in \mathbb{N}^*$, pour lesquels

$$f(n) \equiv r \pmod{q} \quad \text{et} \quad g(n) \equiv r' \pmod{q'} \ ,$$

possède une densité.

On dira que le couple $[f , g]$ est uniformément distribué modulo $[q , q']$ si, quels que soient r et $r' \in \mathbb{Z}$, cet ensemble possède une densité égale à $\frac{1}{qq'}$.

(a) Si f et g sont additives, il y a toujours une loi de distribution asymptotique modulo $[q , q']$.

(b) Il est clair que, pour que le couple $[f , g]$ soit u. d. $\bmod [q , q']$, il est nécessaire que f soit u. d. $\bmod q$ et g soit u. d. $\bmod q'$.

Si f et g sont additives, cette condition est suffisante lorsque $(q , q') = 1$, mais pas lorsque $(q , q') > 1$.

Pour le cas où f et g sont additives et $(q , q') = \delta > 1$, on a le résultat suivant :

<u>Pour que</u> $[f , g]$ <u>soit u. d.</u> $\bmod [q , q']$, <u>il faut et il suffit que</u> :

(α) f <u>soit u. d.</u> $\bmod q$, <u>et</u> g <u>soit u. d.</u> $\bmod q'$,

(β) <u>en outre, pour tout couple d'entiers</u> λ <u>et</u> μ <u>satisfaisant à</u> $0 < \lambda < \delta$, $0 < \mu < \delta$, <u>et</u> $(\lambda , \mu) = 1$, $\lambda f + \mu g$ <u>soit u. d.</u> $\bmod \delta$.