Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres

Yves Meyer

Nombres de Pisot, nombres de Salem et répartition modulo 1

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 10, n° 1 (1968-1969), exp. n° 2, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_1_A2_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
10e année, 1968/69, n° 2

2 décembre 1968

NOMBRES DE PISOT, NOMBRES DE SALEM ET RÉPARTITION MODULO 1

par Yves MEYER

1. Caractère faible, caractère fort sur une partie de $\underset{\sim}{R}$. Cas particulier de l'ensemble des puissances θ^k, $k \geqslant 0$, d'un nombre θ de Pisot ou de Salem.

Soit $\underset{\sim}{T}$ le groupe des nombres complexes de module 1 ; $X(\underset{\sim}{R})$ l'ensemble de tous les homomorphismes de $\underset{\sim}{R}$ dans $\underset{\sim}{T}$ (sans condition de continuité). Soit Λ une partie de $\underset{\sim}{R}$; $X(\Lambda)$ est l'ensemble des restrictions à Λ des éléments de $X(\underset{\sim}{R})$.

DÉFINITION 1. - Tout élément χ de $X(\Lambda)$ est appelé caractère faible sur Λ.

De même, on appelle $x(\Lambda)$ l'ensemble des restrictions à Λ des caractères continus sur $\underset{\sim}{R}$. Tout élément χ de $x(\Lambda)$ est appelé caractère fort sur Λ.

L'ensemble $X(\Lambda)$ peut aussi être défini comme l'ensemble des applications χ de Λ dans $\underset{\sim}{T}$ telles que, pour tout entier naturel n, toute suite $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ d'éléments de Λ, et toute suite $p_1, \dots, p_n$ d'entiers relatifs, la relation $\sum_1^n p_j \lambda_j = 0$ entraîne $\prod_1^n [\chi(\lambda_j)]^{p_j} = 1$.

THÉORÈME 1. - Soit θ un entier algébrique. Soient $\theta_2, \dots, \theta_n$ les conjugués de θ. Soit Λ l'ensemble des puissances θ^k, $k \geqslant 0$. A tout nombre réel positif non nul ε et à tout élément χ de $X(\Lambda)$, on peut associer n nombres complexes $x, x_2, \dots, x_n$ tels que les conditions suivantes soient vérifiées :

(a) x est réel, et les x_j, $j \geqslant 2$, associés à deux θ_j conjugués sont conjugués ;

(b) $|x_j| \leqslant \varepsilon$ $(2 \leqslant j \leqslant n)$;

(c) $\chi(\theta^k) = \exp(2\pi i x \theta^k) \exp 2\pi i (\sum_2^n x_j \theta_j^k)$.

Avant de prouver le théorème 1, donnons-en une application.

COROLLAIRE. - Soit θ un entier algébrique dont les conjugués $\theta_2, \dots, \theta_n$ ont un module inférieur ou égal à 1 (un nombre de Pisot ou de Salem). Soit Λ l'ensemble des puissances θ^k, $k \geqslant 0$, de θ. Tout caractère faible χ sur Λ est limite uniforme sur Λ d'une suite de caractères forts.

On peut montrer la réciproque : Soient θ un nombre réel, Λ l'ensemble des puissances θ^k, $k \geqslant 0$, de θ. Si tout caractère faible sur Λ est limite

uniforme sur Λ de caractères forts, θ est un nombre de Pisot ou de Salem.

Pour montrer le théorème 1, remarquons que les trois suites $\chi(\theta^k)$, $\exp(2\pi i x\theta^k)$ et $\exp 2\pi i(\sum_2^n x_j\,\theta_j^k)$, satisfont à la même relation de récurrence multiplicative $z_{n+k}\, z_{n+k-1}^{a_1} \dots z_k^{a_k} = 1$, et pour démontrer (c) pour toute valeur de k , il suffit de prouver le lemme suivant :

LEMME. - Soient $\varepsilon > 0$, et $(z_0 , \dots , z_{n-1})$ un point de $\underset{\sim}{T}^n$. On peut trouver n nombres complexes $x , x_2 , \dots , x_n$ tels que les conditions (a) et (b) du théorème 1 soient satisfaites et que

$$z_k = \exp(2\pi i x\theta^k) \exp 2\pi i(\sum_2^n x_j\,\theta_j^k) , \qquad \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n-1 .$$

Soit, en effet, Γ le sous-groupe dense à un paramètre de $\underset{\sim}{T}^n$ qui est l'ensemble des points $(\exp(2\pi i x\theta^k))_{0\leqslant k\leqslant n-1}$, $x \in \underset{\sim}{R}$, de $\underset{\sim}{T}^n$. Soit G le sous-groupe de $\underset{\sim}{T}^n$ à $n-1$ paramètres qui est l'ensemble des points $z_0 , \dots , z_{n-1}$ de la forme $z_k = \exp 2\pi i(\sum_2^n x_j\,\theta_j^k)$, où les $x_j \in \underset{\sim}{C}$ associés à deux θ_j conjugués le sont aussi. On a $\Gamma G = \underset{\sim}{T}^n$, et comme Γ est dense dans $\underset{\sim}{T}^n$, il suffit, en partant d'un point quelconque de $\underset{\sim}{T}^n$, de se déplacer très peu le long d'une classe de G pour rencontrer Γ .

2. Répartitions modulo 1 presque-périodiques à l'infini.

Soit $(z_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes de module 1 . Nous dirons que $(z_k)_{k\geqslant 1}$ est asymptotiquement presque-périodique, si l'on peut écrire $z_k = Z_k\,\varepsilon_k$, où $|Z_k| = 1$, $|\varepsilon_k| = 1$, $\lim_{k\to+\infty} \varepsilon_k = 1$, et où Z_k est une fonction presque-périodique de k .

Si θ est un nombre de Pisot ou de Salem, nous allons montrer que $\exp(2\pi i x\theta^k)$, $k \geqslant 0$, est asymptotiquement presque-périodique si, et seulement si, x appartient au corps de θ (théorème 2).

(a) Caractères faibles périodiques. - Soient $\mathcal{G}$ un sous-groupe fini de $\underset{\sim}{T}$, θ un entier algébrique, et χ un caractère faible sur l'ensemble des puissances θ^k , $k \geqslant 0$, à valeurs dans $\mathcal{G}$. Alors la suite $\chi(\theta^k)$, $k \geqslant 0$, est, à partir d'un certain moment, une suite périodique.

Appelons en effet $X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n$ l'élément irréductible de $\underset{\sim}{Z}[X]$ dont θ est solution, et H l'homomorphisme de $\underset{\sim}{T}^n$ défini par

$$H(z_1 , \dots , z_n) = (z_2 , \dots , z_{n+1}) ,$$

où $z_{n+1}(z_n)^{a_1} \dots (z_1)^{a_n} = 1$. La suite des homomorphismes H^k , $k \geqslant 0$, de $\mathcal{S} \times \dots \times \mathcal{S}$ est, à partir d'un certain moment, périodique, et il en est donc de même pour la suite des z_k , $k \geqslant 0$, dès que $z_1 , \dots , z_n$ appartiennent à $\mathcal{S}$.

Réciproquement, soit χ un caractère faible, périodique à partir d'un certain moment, sur l'ensemble des puissances θ^k , $k \geqslant 0$, d'un entier algébrique θ . Alors χ prend ses valeurs dans un sous-groupe fini $\mathcal{S}$ de $\underset{\sim}{T}$.

Soit, en effet, h l'homomorphisme de $\underset{\sim}{R}^n$ défini par

$$h(x_1 , \dots , x_n) = (x_2 , \dots , x_n , x_{n+1}) ,$$

où $x_{n+1} + a_1 x_n + \dots + a_n x_1 = 0$.

En posant $\chi(1) = \exp(2\pi i\alpha_0) , \dots , \chi(\theta^{n-1}) = \exp(2\pi i\alpha_{n-1})$, on aura

$$\chi(\theta^k) = \exp(2\pi i\alpha_k) , \qquad \text{où} \quad (\alpha_k , \dots , \alpha_{k+n-1}) = h^k(\alpha_0 , \dots , \alpha_{n-1}) .$$

L'hypothèse entraîne l'existence de deux entiers k et ℓ tels que $\ell - k > n$ et que $h^k(\alpha_0 , \dots , \alpha_{n-1}) \equiv h^\ell(\alpha_0 , \dots , \alpha_{n-1}) \pmod{\underset{\sim}{Z}^n}$ ou

$$(h^k - h^\ell)(\alpha_0 , \dots , \alpha_{n-1}) \in \underset{\sim}{Z}^n .$$

Mais $\det(h^k - h^\ell) \neq 0$, car les valeurs propres de $h^k - h^\ell$ sont $\theta_j^k - \theta_j^\ell$, et aucun des conjugués de θ n'est une racine de l'unité. Alors

$$(h^k - h^\ell)(\alpha_0 , \dots , \alpha_{n-1}) \in \underset{\sim}{Z}^n$$

entraîne que chaque α_j , $0 \leqslant j \leqslant n - 1$, est un nombre rationnel. Donc χ prend ses valeurs dans un sous-groupe fini de $\underset{\sim}{T}$.

(b) Caractérisation des répartitions modulo 1 asymptotiquement presque-périodiques.

THÉORÈME 2. - Soit θ un nombre de Pisot ou de Salem. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $x \in \underset{\sim}{R}$, et $\exp(2\pi i x\theta^k)$, $k \geqslant 0$, est asymptotiquement presque-périodique ;

(b) Il existe un sous-groupe $\mathcal{S}$ de $\underset{\sim}{T}$, et un caractère faible χ défini sur l'ensemble des puissances θ^k , $k \geqslant 0$, de θ , à valeurs dans $\mathcal{S}$, se décomposant canoniquement en

$$\chi(\theta^k) = \exp(2\pi i x\theta^k) \exp\Big(2\pi i \sum_2^n x_j \theta_j^k\Big) ;$$

(c) x appartient au corps de θ .

D'après ce que nous avons dit sur les caractères faibles prenant leurs valeurs dans un sous-groupe fini $\mathcal{G}$ de $\underset{\sim}{T}$, (b) entraîne (a).

Montrons que (a) entraîne (c). Par hypothèse, à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer un nombre L et un entier K tel que tout intervalle de longueur L contienne un entier τ tel que, pour $k \geqslant K$,

$$|\exp(2\pi i x\theta^{k+\tau}) - \exp(2\pi i x\theta^{k})| \leqslant \varepsilon \quad .$$

Appelons ξ le caractère défini par $\xi(\theta^k) = \exp(2\pi i x(\theta^\tau - 1)\,\theta^k)$. On a

$$|\xi(\theta^k) - 1| \leqslant \varepsilon \qquad \text{dès que} \quad k \geqslant K \quad .$$

On peut donc poser $\xi(\theta^k) = \exp(2\pi i\alpha_k)$, avec $|\alpha_k| \leqslant \varepsilon$ si $k \geqslant K$. On a, pour ces valeurs de k ,

$$\alpha_{k+n} + a_1\,\alpha_{k+n-1} + \ldots + a_n\,\alpha_k \equiv 0 \pmod 1 \quad ,$$

si $\theta^n + a_1\,\theta^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, $a_j \in \underset{\sim}{Z}$. Mais si $\varepsilon(1 + |a_1| + \ldots + |a_n|) < 1$, ces congruences entraînent les égalités correspondantes. On a donc

$$\alpha_k = \sum_2^n x_j\,\theta_j^k \quad , \qquad \text{si} \quad k \geqslant K \quad ;$$

et donc $\xi(\theta^k) = \exp(2\pi i\alpha_k)$ entraîne que

$$x(\theta^\tau - 1)\,\theta^k - \sum_2^n x_j\,\theta_j^k = \alpha_k \in \underset{\sim}{Z} \qquad (k \geqslant K) \quad .$$

La série formelle $\sum\limits_{k\geqslant K} d_k\,X^k$ vaut

$$\frac{x\theta^K\,X^K(\theta^\tau - 1)}{1 - \theta X} - \sum_2^n \frac{x_j\,\theta_j^K\,X^K}{1 - \theta_j\,X} = \frac{P(X)}{Q(X)} \quad ,$$

où $Q(X) = \prod\limits_1^n (1 - \theta_j\,X)$ $(\theta_1 = \theta)$, et où $P(X)$ et $Q(X)$ sont premiers entre eux. Grâce à un théorème de Fatou ([1], lemme 2, p. 64), la série formelle $\sum\limits_{k\geqslant K} d_k\,X^k$ s'écrit $\frac{A(X)}{B(X)}$, où A et B sont deux éléments de $\underset{\sim}{Z}[X]$, premiers entre eux, et où $B(0) = 1$. On a donc

$$x(\theta^\tau - 1) = -\,\theta\,\frac{A(\theta)}{B'(\theta)} \quad ,$$

ce qui entraîne que x appartient au corps de θ .

Remarquons que ce même raisonnement prouve que, si θ est un nombre algébrique qui n'est pas un nombre de Pisot ou de Salem, pour aucun $x \neq 0$, $\exp(2\pi i x\theta^k)$, $k \geqslant 0$, n'est asymptotiquement presque-périodique.

Montrons enfin que (c) entraîne (b). Si x appartient au corps de θ, on peut écrire $x = y/q$, où y est un entier algébrique du corps de θ, et où q est un entier naturel. Soient $y_2, \ldots, y_n$ les conjugués de y, $x_2, \ldots, x_n$ ceux de x, et

$$\chi(\theta^k) = \exp(2\pi i x\theta^k) \exp(2\pi i x_2 \theta_2^k) \ldots \exp(2\pi i x_n \theta_n^k) .$$

Puisque $y\theta^k + y_2 \theta_2^k + \ldots + y_n \theta_n^k$ est un entier, $x\theta^k + x_2 \theta_2^k + \ldots + x_n \theta_n^k$ est de la forme m/q où $m \in \underset{\sim}{Z}$, et χ prend ses valeurs dans un sous-groupe fini de $\underset{\sim}{T}$; (b) est prouvé.

3. Liaison entre suites asymptotiquement presque périodiques, et développement en base θ, périodique à partir d'un certain rang.

Il reste enfin à montrer comment ces notions sont reliées au développement du nombre x en base θ. On a le théorème suivant :

THÉORÈME 3. - *Soit θ un nombre de Pisot supérieur à 2. Si la suite $(\varepsilon_k)_{k\geqslant 0}$ de 0 et de 1 est telle que $x = \sum_{k\geqslant 0} \varepsilon_k \theta^{-k}$ soit un nombre algébrique du corps de θ, alors la suite des ε_k, $k \geqslant 0$, est, à partir d'un certain moment, périodique.*

Pour la preuve du théorème 3, nous utiliserons les notations suivantes : $K = \underset{\sim}{Q}[\theta]$, A l'anneau des entiers de K. Enfin $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ désignent les n $\underset{\sim}{Q}$-isomorphismes distincts de K dans $\underset{\sim}{C}$; σ_1 est l'application identique de K dans $\underset{\sim}{C}$.

LEMME. - *Soient η un nombre réel positif, et Λ la partie de A formée des éléments $\lambda \in A$ tels que $|\sigma_2(\lambda)| \leqslant \eta, \ldots, |\sigma_n(\lambda)| \leqslant \eta$. Alors, si $\lambda \in \Lambda$, $\lambda' \in \Lambda$, et $\lambda \neq \lambda'$, on a $|\lambda - \lambda'| \geqslant (2\eta)^{-n+1}$. En particulier, Λ est un ensemble discret.*

Posons, en effet, $\mu = \lambda - \lambda'$; μ est un élément de A tel que $|\sigma_j(\mu)| \leqslant 2\eta$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$. Mais le produit $\mu\sigma_2(\mu) \ldots \sigma_n(\mu)$ est un entier rationnel. D'où $|\mu\sigma_2(\mu) \ldots \sigma_n(\mu)| \geqslant 1$, et le lemme est prouvé.

Pour prouver le théorème, soit

$$x = \frac{a_0 + a_1 \theta + \ldots + a_{n-1} \theta^{n-1}}{s}$$

un élément de $\mathbb{Q}[\theta]$ où $a_j \in Z$, $s \in Z$. Supposons que

$$x = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \theta^{-1} + \ldots + \varepsilon_k \theta^{-k} + \ldots \quad .$$

On en déduit, pour tout entier p , l'inégalité

$$0 \leqslant \lambda_p \leqslant \frac{s}{\theta - 1} \quad ,$$

où l'on a posé

$$\lambda_p = \theta^p(a_0 + \ldots + a_{n-1} \theta^{n-1}) - s(\varepsilon_0 \theta^p + \varepsilon_1 \theta^{p-1} + \ldots + \varepsilon_p) \quad .$$

Un calcul élémentaire montre que l'on a, pour $2 \leqslant j \leqslant n$,

$$\sigma_j(\lambda_p) \leqslant |a_0| + \ldots + |a_{n-1}| + \frac{s}{1 - |\sigma_j(\theta)|} \quad .$$

Le lemme nous indique que λ_p appartient à un ensemble discret Λ de nombres réels, et la condition $0 \leqslant \lambda_p \leqslant \frac{s}{\theta - 1}$ implique que λ_p appartient à un ensemble fini F de nombres réels qui ne dépend que de θ , a_0 , ... , a_{n-1} , et de s .

Mais $\lambda_{p+1} = \theta\lambda_p - s\varepsilon_{p+1}$ et $0 \leqslant \lambda_{p+1} \leqslant \frac{s}{\theta - 1}$. Comme θ dépasse 2 , ε_{p+1} ne peut prendre indifféremment les valeurs 0 et 1 . La valeur de ε_{p+1} , et donc celle de λ_{p+1} , ne dépendent que de la valeur de λ_p . Puisque λ_p appartient à un ensemble fini F , la suite des λ_p , et donc aussi celle des ε_p , sont, à partir d'un certain moment, deux suites périodiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KAHANE (Jean-Pierre) et SALEM (Raphaël). - Ensembles parfaits et séries trigonométriques. - Paris, Hermann, 1963 (Act. scient. et ind., 1301).

(Manuscrit reçu le 2 décembre 1968)

Yves MEYER
M. Conf. Fac. Sc. Orsay
Résidence Saint-Eloi
8 rue Courbet
91 - CHILLY-MAZARIN