Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

EMMANUEL GILQUIN

# Comportement des fonctions arithmétiques complexes, multiplicatives, à valeurs dans le disque $|z| \leqslant 1$

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 10, nº 1 (1968-1969), exp. nº 13, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_1_A12_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
10e année, 1968/69, n° 13, 8 p. 
17 mars 1968

# COMPORTEMENT DES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES COMPLEXES, MULTIPLICATIVES, À VALEURS DANS LE DISQUE $|z| \leqslant 1$

par Emmanuel GILQUIN

A toute fonction arithmétique $f$, on fait correspondre la fonction

$$M(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n) , \qquad \text{où} \quad x \in \underset{\sim}{R}^{+} .$$

Quand $x \to +\infty$, si $\frac{1}{x} M(x)$ tend vers une limite finie, cette dernière sera, par définition, <u>la valeur moyenne</u> de la fonction $f$.

Dans ce qui suit, nous nous limiterons aux fonctions arithmétiques, <u>multiplicatives, et telles que</u> $|f(n)| \leqslant 1$, $\forall\, n \in \underset{\sim}{N}^{*}$ (<u>ces fonctions forment la classe</u> $\mathfrak{M}_0$), en vue, en particulier, d'une application à la recherche des lois de distribution des fonctions arithmétiques additives à valeurs entières (cf. exposé n° 5 de ce Séminaire, par H. DELANGE).

La conjecture d'Erdös : "Une fonction de $\mathfrak{M}_0$, ne prenant que les valeurs $+1$ ou $-1$, admet une valeur moyenne", a été démontrée par WIRSING, qui a émis une conjecture plus générale :

"Pour toute fonction de $\mathfrak{M}_0$, il existe un nombre complexe $C_0$, un nombre réel $a_0$, et une fonction $L_0(u)$, de module 1, à oscillation lente, tels que

$$M(x) = C_0\, L_0(\log x)\, x^{1+ia_0} + o(x) \quad ([4])" .$$

La démonstration complète en a été donnée par G. HALASZ ([3]). On peut l'alléger notablement en utilisant des théorèmes précédemment démontrés par H. DELANGE ([1] et [2]).

<u>Schéma de la démonstration</u>. - On part de la fonction

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \qquad (s = \sigma + it , \quad \sigma > 1) .$$

Pour utiliser au maximum la multiplicativité, on associe à $f$ la fonction $f^{*}$ <u>strictement</u> multiplicative (c'est-à-dire telle que $f^{*}(m).f^{*}(n) = f^{*}(mn)$, pour tout $m$ et tout $n$ de $\underset{\sim}{N}^{*}$), définie par

$$f^{*}(p) = f(p) \qquad \text{pour tout } p \text{ premier} .$$

Pour $\sigma > 1$ ,

$$F^*(s) = \sum_1^\infty \frac{f^*(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{f^*(p)}{p^s} + \frac{f^{*2}(p)}{p^{2s}} + \dots\right) = \exp\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda(n)\ f^*(n)}{n^s}\right) ,$$

où

$$\lambda(n) = \begin{cases} \frac{1}{k} , & \text{si } n = p^k , \\ 0 , & \text{dans le cas contraire} . \end{cases}$$

Nous voulons comparer $|F^*(s)|$ et $\frac{1}{\sigma - 1}$ . Or $\zeta(\sigma) = \frac{1}{\sigma - 1} + o\left(\frac{1}{\sigma - 1}\right)$ . Donc on peut, en fait, comparer $|F^*(s)|$ et $\zeta(\sigma)$ .

$$\frac{|F^*(s)|}{\zeta(\sigma)} = \exp\left(\sum_1^\infty \frac{\lambda(n)}{n^\sigma} \mathrm{Re}[f^*(n)\ n^{-it}]\right) / \exp\left(\sum_1^\infty \frac{\lambda(n)}{n^\sigma}\right)$$

$$= \exp\left(- \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda(n)}{n^\sigma} (1 - \mathrm{Re}[f^*(n)\ n^{-it}])\right) .$$

La série en exposant est une série à termes positifs. Sa somme, qui est positive, est, pour $t$ fixé, une fonction décroissante de $\sigma$ .

Etudions le comportement de cette dernière quand $\sigma \to 1 + 0$ , à $t$ constant.

Deux cas se présentent :

(A) Il existe au moins un $a_0$ réel, tel que

$$\lim_{\sigma \to 1} \sum_1^\infty \frac{\lambda(n)}{n^\sigma} (1 - \mathrm{Re}(f^*(n)\ n^{-ia_0})) = A , \quad \text{constante finie} .$$

(B) Pour tout $t$ fixé, cette somme tend vers $+\infty$ quand $\sigma \to 1 + 0$ . Or cette somme est une fonction décroissante de $\sigma$ . En appliquant le théorème de Dini, on déduit que cette somme tend vers $+\infty$ quand $\sigma \to 1 + 0$ , uniformément par rapport à $t$ sur toute bande $|t| \leqslant K$ .

Donc, dans ce cas, $F^*(s) = o\left(\frac{1}{\sigma - 1}\right)$ $(\sigma \to 1 + 0)$ uniformément par rapport à $t$ sur toute bande $|t| \leqslant K$ .

Il est nécessaire et suffisant, pour qu'on soit dans ce cas, qu'on ait, pour tout $t$ réel, $\sum_1^\infty \frac{\lambda(n)}{n} (1 - \mathrm{Re}(f^*(n)\ n^{-it})) = +\infty$ , ce qui équivaut à

$$\sum_p \frac{1 - \mathrm{Re}(f^*(p)\ p^{-it})}{p} = +\infty .$$

1. Etude du cas (A).

1° Montrons que $a_0$ est unique. - Raisonnons par l'absurde. Supposons que, pour $a_1 \neq a_0$, $\lim\limits_{\sigma\to 1} \sum\limits_1^\infty \frac{\lambda(n)}{n^\sigma} (1 - \mathrm{Re}(f^*(n)\, n^{-ia_1})) < +\infty$. $|f^*(n)\, n^{-ia_1}| \leqslant 1$, donc

$$2(1 - \mathrm{Re}(f^*(n)\, n^{-ia_1})) \geqslant |1 - f^*(n)\, n^{-ia_1}|^2 \quad .$$

D'autre part,

$$2|1 - f^*(n)\, n^{-ia_0}|^2 + 2|f^*(n)\, n^{-ia_0} - n^{i(a_1-a_0)}|^2 \geqslant |1 - n^{i(a_1-a_0)}|^2 \quad .$$

On remarque que

$$|f^*(n)\, n^{-ia_0} - n^{i(a_1-a_0)}| = |1 - f^*(n)\, n^{-ia_1}| \quad ,$$

et que $|n^{i(a_1-a_0)}| = 1$ . Donc

$$2(1 - \mathrm{Re}(n^{i(a_1-a_0)})) = |1 - n^{i(a_1-a_0)}|^2 \quad .$$

Comme $|f^*(n)\, n^{-ia_0}| \leqslant 1$ , on a

$$2(1 - \mathrm{Re}(f^*(n)\, n^{-ia_0})) \geqslant |1 - f^*(n)\, n^{-ia_0}|^2 \quad .$$

D'où finalement l'inégalité

$$(1 - \mathrm{Re}[f^*(n)\, n^{-ia_1}]) \geqslant \frac{1}{2} (1 - \mathrm{Re}(n^{i(a_1-a_0)})) - [1 - \mathrm{Re}[f^*(n)\, n^{-ia_0}]] \quad .$$

Donc, pour tout $\sigma > 1$ ,

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda(n)}{n^\sigma} (1 - \mathrm{Re}[f^*(n)\, n^{-ia_1}])$$
$$\geqslant \frac{1}{2} \sum_1^\infty \frac{\lambda(n)}{n^\sigma} (1 - \mathrm{Re}(n^{i(a_1-a_0)})) - \sum_1^\infty \frac{\lambda(n)}{n^\sigma} [1 - \mathrm{Re}(f^*(n)\, n^{-ia_0})] \quad .$$

Or

$$\sum_1^\infty \frac{\lambda(n)}{n^\sigma} (1 - \mathrm{Re}(n^{i(a_1-a_0)})) = \log \frac{\zeta(\sigma)}{|\zeta(\sigma - i(a_1 - a_0))|} \quad .$$

Quand $\sigma \to 1$ , $|\zeta(\sigma - i(a_1 - a_0))|$ tend vers une limite finie, puisque $a_0 \neq a_1$ , tandis que $\zeta(\sigma) \to +\infty$ ; comme $\sum\limits_1^\infty \frac{\lambda(n)}{n^\sigma} [1 - \mathrm{Re}(f^*(n)\, n^{-ia_0})]$ tend vers une limite finie, la série au premier membre de l'inégalité ci-dessus ne peut tendre vers une limite finie.

L'hypothèse $a_1 \neq a_0$ est donc absurde.

2° Si $\lim\limits_{\sigma\to 1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^\sigma} (1 - \mathrm{Re}[f^*(n)\, n^{-ia_0}])$ est finie, alors

$$\sum_1^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n} (1 - \mathrm{Re}(f^*(n)\, n^{-ia_0})) \quad \text{converge} ,$$

ce qui équivaut d'ailleurs à

$$\sum_p \frac{1 - \mathrm{Re}(f^*(p)\, p^{-ia_0})}{p} \quad \text{converge} \qquad (p \text{ premier}) .$$

Or $f^*(p) = f(p)$ . On déduit immédiatement

$$\sum_{\mathrm{Re}(f(p)\, p^{-ia_0})<1-\varepsilon} \frac{1}{p} < +\infty , \qquad \forall\, \varepsilon > 0 .$$

Et donc, d'après les théorèmes 2, puis 1, de DELANGE ([1]),

$$\frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} f(n)\, n^{-ia_0} = \prod_{p\leqslant x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(p^j)^{-ia_0} f(p^j)}{p^j}\right) + \sigma(1)$$

$$= C \exp\{- \sum_{p\leqslant x} \frac{1 - f(p)\, p^{-ia_0}}{p}\} + \sigma(1) ,$$

$C$ étant une constante.

(a) $(C = 0) \iff (2^{-ria_0} f(2^r) = -1 , \ \forall\, r \geqslant 1)$ . Donc, dans le cas (A), " $n^{-ia_0} f(n)$ <u>admet une valeur moyenne nulle</u>" équivaut à cette propriété (puisque le module de l'exponentielle admet une limite qui est $\exp\{- \sum\limits_p \frac{1 - \mathrm{Re}(f(p)\, p^{-ia_0})}{p}\}$ ). On verra plus loin que $f(n)$ <u>a le même comportement que</u> $f(n)\, n^{-ia_0}$ .

(b) Si $C \neq 0$ , il y a deux cas possibles :

($\alpha$) $\sum\limits_p \frac{\mathrm{Im}(f(p)\, p^{-ia_0})}{p}$ converge (ce qui équivaut à $\sum\limits_p \frac{1 - f(p)\, p^{-ia_0}}{p}$ converge), et alors $f(n)\, n^{-ia_0}$ admet une valeur moyenne non nulle $C_0$ ;

($\beta$) Dans le cas contraire, on peut poser

$$\exp\left(+ i \sum_{p \leqslant e^u} \frac{\mathrm{Im}(f(p)\, p^{-ia_0})}{p}\right) = L(u) \quad .$$

On a bien $|L(u)| = 1$ , et d'autre part

$$\left| \sum_{e^u < p \leqslant e^{2u}} \frac{\mathrm{Im}(f(p)\, p^{-ia_0})}{p} \right| \leqslant \sqrt{\left( \sum_{e^u < p \leqslant e^{2u}} \frac{1}{p}\right) \left( \sum_{e^u < p \leqslant e^{2u}} \frac{\mathrm{Im}^2(p^{-ia_0} f(p))}{p}\right)}$$

$$\leqslant \sqrt{\left( \sum_{e^u < p \leqslant e^{2u}} \frac{1}{p}\right) 2 \sum_{e^u < p \leqslant e^{2u}} \frac{1 - \mathrm{Re}(p^{-ia_0} f(p))}{p}} \quad .$$

Or $\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \log \log x + a + \sigma\left(\frac{1}{\log x}\right)$ .

Donc le 1er terme du produit tend vers $\log 2$ quand $u \to +\infty$ , tandis que le 2e tend évidemment vers $0$ .

Si $M_0(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n)\, n^{-ia_0}$ , on peut écrire

$$M_0(x) = C_0\, xL(\log x) + \sigma(x) \quad .$$

<u>Passage de</u> $f(n)\, n^{-ia_0}$ <u>à</u> $f(n)$ .

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = M(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} t^{ia_0}\, d(M_0(x)) = x^{ia_0} M_0(x) - ia \int_1^x t^{ia-1} M_0(t)\, dt \quad .$$

Il est évident que $(M_0(x) = \sigma(x)) \iff (M(x) = \sigma(x))$ , si

$$M_0(x) = C_0\, xL(\log x) + \sigma(x) \quad .$$

Alors on montre, après le changement de variable $t = xu$ , et un passage à la limite dans l'intégrale obtenue, que

$$M(x) = \frac{C_0}{1 + ia_0}\, x^{1+ia_0} L(\log x) + \sigma(x) \quad .$$

2. <u>Etude du cas</u> (B).

Montrons le théorème taubérien suivant :

<u>Si</u>

$F(s) = o\left(\frac{1}{\sigma - 1}\right)$ uniformément par rapport à $t$ sur toute bande $|t| \leqslant K$ ,

$f(n)$ multiplicative strictement, avec $|f(n)| \leqslant 1$ , $\forall\, n \in \underset{\sim}{N}^*$

(condition taubérienne), alors $f$ admet une valeur moyenne nulle.

Schéma de la démonstration (voir G. HALASZ [3]. Les hypothèses utilisées ici simplifient beaucoup la démonstration).

$$F'(s) = -\sum_1^{\infty} \frac{f(n) \log n}{n^s} \quad ;$$

on lui associe

$$N(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n) \log n \quad .$$

Si $N(x) = o(x \log x)$ , alors $M(x) = o(x)$ . D'après une formule connue,

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) \log n . \log \frac{x}{n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_0)} \frac{x^s}{s^2} [- F'(s)]\, ds \ , \qquad \text{où} \quad \sigma_0 > 1 \quad ,$$

si

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) \log n . \log \frac{x}{n} = o(x \log x) \quad ,$$

on pourra en déduire (en écrivant l'égalité pour $x$ et $x(1 + \varepsilon)$ , et en soustrayant membre à membre)

$$N(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n) \log n = o(x \log x) \quad .$$

Choisissons $\sigma_0 = 1 + \frac{1}{\log x}$ . Soit $(\sigma_0)$ la droite d'abscisse $\sigma_0$ . Sur la droite $(\sigma_0)$ , on a, d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\left|\int_{(\sigma_0)} \frac{x^{s-1}}{s^2} [- F'(s)]\, ds\right| \leqslant x^{\sigma_0 - 1} \int_{(\sigma_0)} \frac{|F'(s)|}{|s|^2} = e \int_{(\sigma_0)} \frac{|\frac{F'}{F}(s)|}{|s|^{3/4}} \frac{|F(s)|}{|s|^{5/4}} |ds|$$

$$\leqslant e \sqrt{\int_{(\sigma_0)} \frac{|\frac{F'}{F}(s)|^2}{|s|^{3/2}} |ds| \int_{(\sigma_0)} \frac{|F(s)|^2}{|s|^{5/2}} |ds|} \ .$$

(Pour le reste de la démonstration, voir [3].) On notera en particulier l'emploi de la formule de Parseval pour se ramener à la fonction $\zeta$ , ainsi que la technique utilisée pour majorer le 1er terme du produit, en partant de

$$\int_{(\sigma_0)} \left|\frac{F'(s)}{F(s)}\right|^2 \frac{ds}{|s|^2} = o\left(\frac{1}{\sigma - 1}\right) \quad .$$

Donc $f(n)$ admet une valeur moyenne nulle.

Pour montrer que tout $f$ de $\mathfrak{M}_0$ , tel que $F(s) = \sigma\left(\frac{1}{\sigma - 1}\right)$ , a une valeur moyenne nulle, on applique le théorème 3 de DELANGE ([2], p. 285) à $f^*(n)$ .

La conjecture de Wirsing est donc entièrement démontrée.

Pour terminer, revenons à la conjecture d'Erdös, et aux problèmes des valeurs moyennes.

Dans le cas où $f$ ne prend que des valeurs réelles (c'est-à-dire $-1$ et $+1$ ), il est évident que s'il existe $a_0$ tel que $\sum_p \frac{1 - \mathrm{Re}(f(p)\, p^{-ia_0})}{p}$ converge, alors $(-a_0)$ jouit de la même propriété. D'après le théorème d'unicité, $a_0 = 0$ . D'autre part, dans ce cas, par construction, $L(u) = 1$ , $\forall\, u$ . Ce qui montre la conjecture d'Erdös.

L'étude des valeurs moyennes permet de préciser le résultat de Wirsing.

D'après ce qui précède, $f$ n'admet de valeur moyenne nulle que dans les deux cas suivants :

$$\begin{cases} \text{(a)} \quad f(2^r) = 2^{ria_0} , \quad a_0 \text{ étant le seul } t \text{ tel que } \sum_p \frac{1 - \mathrm{Re}(f(p)\, p^{-it})}{p} \text{ converge} ; \\ \text{(b)} \quad \sum_p \frac{1 - \mathrm{Re}(f(p)\, p^{-it})}{p} = +\infty , \quad \text{pour tout } t \text{ réel} . \end{cases}$$

D'après le théorème 1 de DELANGE [2], $f$ n'admet de valeur moyenne non nulle que dans le cas suivant :

$$\begin{cases} \sum_p \frac{1 - f(p)}{p} \text{ converge} \quad (\text{ce qui correspond à } a_0 = 0 \text{ et au cas étudié } (A - a - \alpha)) , \\ \underline{\text{et}} \\ f(2^r) = -1 \quad \text{n'est pas vrai pour tout } r \geqslant 1 . \end{cases}$$

Dans tous les autres cas, $f$ n'admet pas de valeur moyenne, et on a la forme générale

$$M(x) = C_0\, L_0(\log x)\, x^{1+ia_0} + \sigma(x) .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] DELANGE (H.). - On a class of multiplicative arithmetical functions, Scripta Math., t. 26, 1961, p. 121-141.

[2] DELANGE (H.). - Un théorème sur les fonctions arithmétiques multiplicatives et ses applications, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 78, 1961, p. 1-29.

[3] HALASZ (G.). - Über die Mittelwerte multiplikativer Zahlentheoretischer Funktionen, Acta Math. Acad. Sc. Hungaricae, t. 19, 1968, p. 365-403.

[4] WIRSING (E.). - Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen, II, Acta Math. Acad. Sc. Hungaricae, t. 18, 1967, p. 411-467.

(Texte reçu le 24 juin 1969)

Emmanuel GILQUIN
Ecole Normale Supérieure
de l'Enseignement Technique
61 avenue du Président Wilson
94 - CACHAN