

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

NORBERT A'CAMPO

Théorème de préparation différentiable ultramétrique, II

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 10, n° 1 (1968-1969),
exp. n° 11, p. 1-4

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_1_A11_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres »
implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction
pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME DE PRÉPARATION DIFFÉRENTIABLE ULTRAMÉTRIQUE, II

par Norbert A'CAMPO

Dans notre exposé précédent ([1]), il a été démontré un théorème de préparation pour les algèbres \mathcal{E}_K^n lorsque K est un corps ultramétrique complet et algébriquement clos. A présent, nous montrerons comment obtenir le même résultat en faisant une hypothèse beaucoup plus faible sur le corps K .

1. Corps s-clos et faiblement s-clos.

Soit K un corps, et soit s un entier ≥ 1 . Soit $\sigma : K^s \rightarrow K^s$ l'application dont la i -ième composante σ_i est la i -ième fonction symétrique en s variables. L'application σ est surjective si, et seulement si, tout polynôme $p(X) \in K[X]$, de degré $\leq s$, a toutes ses racines dans K .

Définition

1° Un corps K est dit s -clos ($s \geq 1$), si l'application $\sigma : K^s \rightarrow K^s$ est surjective.

2° Un corps valué K est dit faiblement s -clos, s'il existe une extension valuée L , s -close de K , et s'il existe un projecteur K -linéaire et continu de L sur K .

Exemples.

Tout corps algébriquement clos est s -clos.

Tout corps K ultramétrique, localement compact, est s -clos pour tout $s \geq 1$. En effet, il existe une extension finie s -close L . Soit n l'ordre du groupe $\text{Gal}(L, K)$, alors $\frac{1}{n} \text{Tr}_{L/K} : L \rightarrow K$ est un projecteur K -linéaire et continu de L sur K . Donc, les corps \mathbb{Q}_p et leurs extensions finies sont faiblement s -clos pour tout $s \geq 1$. Par la trace, nous avons défini un projecteur explicitement.

Tout corps ultramétrique maximallement complet est faiblement s -clos. En effet, soit L la clôture algébrique complétée de K . C'est un espace de Banach sur K . Le théorème d'Ingleton ([2]) montre qu'il existe, à L , une extension, de norme 1, de l'identité 1_K . Cette extension est donc un projecteur K -linéaire et continu de L sur K .

Question : Tout corps valué complet est-il faiblement s -clos ($s \geq 1$) ?

2. Théorème de division.

Notons

$$(x, c, t) = (x_1, \dots, x_n; c_1, \dots, c_s; t) \in K^n \times K^s \times K,$$

et

$$(x, c, t) \mapsto \varphi(c, t) = t^s + c_1 t^{s-1} + \dots + c_s \in \mathcal{E}(K^n \times K^s \times K).$$

Comme l'a fait J. MATHER [3], un théorème de préparation pour les algèbres \mathcal{E}_K^n (K étant supposé ultramétrique, complet, et faiblement s -clos pour tout $s \geq 1$) se déduit du théorème suivant.

THÉORÈME de division. - Soit K un corps ultramétrique complet et faiblement s -clos. Alors, pour tout $f \in \mathcal{E}(K^n \times K^s \times K)$, il existe

$$q \in \mathcal{E}(K^n \times K^s \times K) \quad \text{et} \quad h_i \in \mathcal{E}(K^n \times K), \quad 1 \leq i \leq s,$$

tels que

$$f(x, c, t) = \varphi(c, t).q(x, c, t) + t^{s-1}.h_1(x, c) + \dots + h_s(x, c).$$

Si K est s -clos, les fonctions $q, h_i, 1 \leq i \leq s$, sont déterminées de façon unique par f .

Lorsque K est s -clos, ce théorème a été démontré dans notre exposé précédent ([1]). Le cas général résulte du lemme suivant.

LEMME. - Soit $p: L \rightarrow K$ un projecteur continu d'une extension ultramétrique complète L de K sur K . Alors, l'application K -linéaire

$$A: \mathcal{E}(L^n) \rightarrow \mathcal{E}(K^n),$$

définie par $F \in \mathcal{E}(L^n) \mapsto p \circ F \circ i \in \mathcal{E}(K^n)$, est surjective.

Avant de donner des indications sur la démonstration de ce lemme, nous terminons celle du théorème de division :

Soit $f \in \mathcal{E}(K^n \times K^s \times K)$, et soit K -faiblement s -clos. Soit L une extension s -close de K , munie d'un projecteur K -linéaire et continu $p: L \rightarrow K$. Soit $F \in \mathcal{E}(L^n \times L^s \times L)$ tel que $A(F) = f$. Notons encore par P l'extension de la fonction polynôme $\varphi: K^s \times K \rightarrow K$ à $P: L^s \times K \rightarrow K$. Nous savons, puisque L est s -clos, qu'il existe $Q \in \mathcal{E}(L^n \times L^s \times L)$ et $H_i \in \mathcal{E}(L^n \times L^s)$, $1 \leq i \leq s$, tels que, pour $(x, c, t) \in L^n \times L^s \times L$, on a

$$F(x, c, t) = \rho(c, t) Q(x, c, t) + t^{s-1} H_1(x, c) + \dots + H_s(x, c) ,$$

et donc, si l'on pose $q = A(Q)$ et $h_i = A(H_i)$, il vient,

pour $(x, c, t) \in K^n \times K^s \times K$,

$$f(x, c, t) = \rho(c, t) \cdot q(x, c, t) + t^{s-1} h_1(x, c) + \dots + h_s(x, c) .$$

3. Indications sur la démonstration du lemme.

Pour $z \in L^n$, on pose $z' = p(z)$ et $z'' = z - z'$. Soit $f \in \mathcal{E}(K^n)$. On peut construire une fonction $F : L^n \rightarrow L$, prolongeant f , de la manière suivante : on pose, pour $z \in L^n$,

$$(1) \quad F(z) = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} D^i f(z') [z'']^i \varepsilon_i(z) ,$$

où ε_i est une fonction $L^n \rightarrow L$, définie par

$$\varepsilon_i(z) = \begin{cases} 0 , & \text{si } |z''| \geq C(f, i) , \\ 1 , & \text{si } |z''| < C(f, i) , \end{cases}$$

les $C(f, i)$ étant des constantes choisies de sorte que (1) converge convenablement. La fonction F est K -différentiable, mais elle n'est pas L -différentiable en général. Pour cela, nous devons modifier la fonction $z \mapsto z'$.

Pour $k \in \underline{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \underline{\mathbb{N}}$, on pose

$$A_{k, \ell} = \left\{ z \in L^n \mid \frac{1}{2^{k+1}} \leq |z''| < \frac{1}{2^k} \text{ et } \frac{\ell}{2^{k+1}} \leq |z'| < \frac{\ell+1}{2^{k+1}} \right\} .$$

On pose

$$A_{-1} = \{ z \in L^n \mid |z''| \geq 1 \} .$$

Les parties $A_{k, \ell}$ et A_{-1} forment une partition ouverte de $L^n - K^n$. Désignons par $a_{k, \ell}$ un point fixé dans $A_{k, \ell}$.

Pour $z \in L^n$, on pose

$$\bar{z} = \begin{cases} a_{k, \ell} , & \text{si } z \in A_{k, \ell} , \\ z' , & \text{si } z \in K^n , \\ 0 , & \text{si } z \in A_{-1} . \end{cases}$$

Pour définir un prolongement de f , on pose

$$F(z) = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} D^i f(\bar{z}) [z - \bar{z}]^i \varepsilon_i(z) ,$$

où les ε_i sont des fonctions $L^n \rightarrow L$, qui valent 1 "proche" à K^n , et 0 "loin" de K^n .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A'CAMPO (Norbert). - Théorème de préparation différentiable ultramétrique, I, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, 9e année, 1967/68, n° 17, 7 p.
- [2] CARPENTIER (Jean-Pierre). - Semi-normes et ensembles convexes dans un espace vectoriel sur un corps valué ultramétrique, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 4e année, 1964/65, n° 7, 68 p. - Paris, Secrétariat mathématique, 1965 (Mathematica Seminosa, 1).
- [3] MATHER (John). - Stability of C^∞ mappings, I : The division theorem, Annals of Math., Series 2, t. 87, 1968, p. 89-104.

(Texte reçu le 27 octobre 1969)

Norbert A'CAMPO
 Faculté des Sciences de Poitiers
 Service de Mathématiques
 Route de Chauvigny
 86 - POITIERS
