

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

GILLES CHRISTOL

Formes modulaires et nombres de Ramanujan

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 9, n° 2 (1967-1968),
exp. n° G8, p. G1-G4

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1967-1968__9_2_A14_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

12 février 1968

FORMES MODULAIRES ET NOMBRES DE RAMANUJAN

par Gilles CHRISTOL

DÉFINITION. - On appelle groupe modulaire, et on note Γ , le groupe $SL(2, \mathbb{Z})$, c'est-à-dire le groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, à coefficients entiers et de déterminant 1.

Γ opère sur le demi-plan H (défini par $\text{Im}(z) > 0$) suivant :

$$(1) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

DÉFINITION. - Un domaine fondamental D de Γ est un ouvert de H maximal parmi les ouverts contenant un point au plus dans chaque orbite $\Gamma \cdot z$. Par exemple, l'ensemble défini par $|z| > 1$, $|\text{Re}(z)| < 1/2$, est domaine fondamental de Γ .

Remarque. - Cette définition n'est pas universelle, on en rencontre de nombreuses autres, toutes aussi peu satisfaisantes, car les systèmes de représentant de $\Gamma \backslash H$ ont une nature topologique compliquée.

DÉFINITION. - Une forme modulaire de poids k est une fonction méromorphe dans $\{H + i\infty\}^{(1)}$, et qui vérifie, pour tout T de Γ ,

$$(2) \quad f(T \cdot z) = (cz + d)^k f(z), \quad \text{où } T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Remarques. - Puisque T et $(-T)$ représentent la même transformation, $f(z) = 0$ si k est impaire. Ceci explique que l'on trouve comme définition du poids, au lieu de k , $2k$ (textes français) ou $(-k)$ (textes allemands).

Puisque les translations $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ font partie de Γ , une forme modulaire est périodique de période 1 ; elle peut donc se développer en série de Fourier :

$$f(z) = \sum_{n \geq N} a(n) x^n, \quad \text{avec } x = e^{2\pi i z}.$$

Les $a(n)$ sont appelés les coefficients de Fourier de f ; l'existence du N est équivalente à f méromorphe en $(i\infty)$.

(1) $(i\infty)$ désigne le point à l'infini de l'axe imaginaire.

DÉFINITION. - Une forme est dite entière, si elle est régulière (sans pôle) dans H . Sa série de Fourier converge alors dans H .

Une forme est dite régulière, si elle est entière et si $N \geq 0$ (régularité en $(i\infty)$).

Une forme est dite parabolique (spizenform, cuspform), si $N \geq 1$ (nulle en $(i\infty)$).

Les formes entières, régulières, paraboliques, de poids k , forment des espaces respectivement notés : C_k , C_k^+ , C_k^0 .

THÉOREME 1. - L'espace C_k^+ est de dimension finie, et on a :

$$\dim(C_k^+) = \dim(C_k^0) + 1 = \kappa.$$

κ est nul si $k < 0$, si $k \geq 0$ on a les formules (k est un entier pair) :

$$\kappa = \left[\frac{k}{12} \right], \quad \text{si } k \equiv 2 \pmod{12},$$

$$\kappa = \left[\frac{k}{12} \right] + 1, \quad \text{si } k \not\equiv 2 \pmod{12}.$$

Les seules formes régulières de poids inférieur à 4 sont donc les constantes ($k = 0$).

Les séries d'Eisenstein : La série $\sum'_{c,d} \frac{1}{(cz + d)^k}$ (où le ' indique que le couple $(0, 0)$ est à omettre) converge pour $k \geq 4$, et définit ainsi une forme régulière G_k de poids k . On peut établir les relations suivantes :

$$G_k(z) = 2\zeta(k) E_k(z) = 2\zeta(k) \left(1 + \alpha_k \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) x^n \right),$$

$$\alpha_k = \frac{2(-1)^{k/2} k}{B_{k/2}}; \quad \sigma_k = \sum_{d|n} d^k \quad (B, \text{ nombres de Bernoulli}).$$

G_k est la série d'Eisenstein de poids k , et E_k la série d'Eisenstein normalisée. Il est évident que, sous la deuxième forme, les séries d'Eisenstein sont régulières mais non paraboliques.

THÉOREME 2. - Toute forme régulière est un polynôme en E_4 et E_6 (notons au passage que $\alpha_4 = 240$, $\alpha_6 = -504$, et $\alpha_{12} = \frac{54600}{691}$).

Le théorème 1 montre que $\kappa = 1$ pour $k = 4, 6, 8, 10$; donc la forme parabolique de poids minimum sera obtenue pour $k = 12$; d'après le théorème 2, elle sera une combinaison linéaire des formes E_4^3 et E_6^2 (les seuls monômes en E_4 et E_6

qui soient de poids 12), il suffit donc d'assurer $N \geq 1$, on trouve donc (après normalisation) :

$$E_4^3 - E_6^2 = (3\alpha_4 - 2\alpha_6)(x - 24x^2 + 252x^3 + \dots) = 1728\Delta.$$

Les coefficients de Fourier de Δ s'appellent nombres de Ramanujan, et sont notés $\tau(n)$; HURWITZ (1881) a démontré dans sa thèse que

$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^n = x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{24},$$

ce qui démontre, en particulier, que les $\tau(n)$ sont entiers. La connaissance des E_k et l'unicité de Δ (à une constante près) en tant que forme parabolique de poids 12 permet de trouver des relations entre les $\tau(n)$ et les $\sigma_k(n)$ (voir RAMANUJAN).

Nous définirons (PETERSON) le produit suivant :

$$\langle f, g \rangle = \iint_D f(z) \overline{g(z)} y^k \frac{dx dy}{y^2} \quad (\text{ici } z = x + iy),$$

c'est un produit hermitien indépendant du domaine D , fondamental, choisi, ce produit a un sens du moment qu'une fonction appartient à C_k^+ et l'autre à C_k^0 ; en particulier, E_k est orthogonale aux formes de C_k^0 ; sur C_k^0 , ce produit permet de trouver des bases orthonormées.

THÉOREME 3. - Il existe κ fonctions de C_k^+ dont les coefficients de Fourier vérifient :

$$(3) \quad \begin{cases} a(mn) = a(m) a(n) & \text{pour } (m, n) = 1, & \text{ce qui entraîne } a(1) = 1, \\ a(p^{m+1}) = a(p^m) a(p) - p^{k-1} a(p^{m-1}) & \text{pour } p \text{ premier}, \end{cases}$$

et qui forment une base orthonormée de C_k^+ : ce système est unique.

Remarques. - Nous savons, d'après ce qui précède, que E_k/α_k fait partie de cette base (comme fonction de $C_k^+ - C_k^0$ orthogonale à C_k^0 et ayant son premier coefficient de Fourier égal à 1, comme (3) l'impose).

La condition (3) est équivalente à :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \prod_p (1 - a(p) p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1} \quad (p \text{ premier}).$$

(Il serait intéressant d'étudier le prolongement de cette fonction.) Par ce procédé (attacher une série de Dirichlet à une forme de C_k^+), on transforme $(E_k - 1)/\alpha_k$ en $\zeta(s) \zeta(s - k + 1)$.

Dans le cas $k = 12$, la deuxième fonction de la base ne peut évidemment être que Δ ; le théorème 3 a donc pour conséquence que les $\tau(n)$ vérifient les conditions (3).

La bibliographie sur ce sujet est très importante, on pourra consulter comme ouvrages élémentaires :

GUNNING (R. C.). - Lectures on modular forms. - Princeton, Princeton University Press, 1962 (Annals of Mathematics Studies, 48).

LEHNER (Joseph). - A short course in automorphic function. - New York, Holt, Rinehart and Winston, 1966 (Selected Topics in Mathematics).

Voir aussi la dernière partie de l'ouvrage suivant :

SERRE (J.-P.). - Compléments d'arithmétique. Cours aux "Carrés", rédigé par J.-P. Ramis et G. Ruget. - Paris, Ecole Normale Supérieure, 1964.
