Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

DANIEL BARSKY

Interpolation p-adique

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 9, n° 1 (1967-1968), exp. n° 11, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1967-1968__9_1_A11_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des Nombres)
9e année, 1967/68, n° 11

29 janvier 1968

INTERPOLATION p-ADIQUE

par Daniel BARSKY

(d'après Mme Y. AMICE [1])

Cet exposé reprend, dans le cas particulier de $\mathbb{Z}_p$ et $\mathbb{Q}_p$, les résultats de la thèse de Mme Y. AMICE sur l'interpolation p-adique. Le but est de caractériser certaines bases normales pour les espaces de fonctions continues de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Q}_p$.

1. Suites très bien réparties.

DÉFINITION 1. - Soit F un ensemble fini de cardinal N , et soit u une suite $n \to u_n$ à valeur dans F . La suite u est bien répartie dans F si, et seulement si :

$$\forall\, x \in F , \quad \forall\, n \geqslant 1 , \qquad \mathrm{Card}\{u^{-1}(x) \cap [0 , \ldots , n - 1]\} \geqslant [\tfrac{n}{N}] ,$$

où $[\frac{n}{N}]$ désigne la partie entière de $\frac{n}{N}$.

On posera $\nu_u(x , u) = \mathrm{Card}\{u^{-1}(x) \cap [0 , \ldots , n - 1]\}$; on notera v la valuation habituelle de $\mathbb{Z}_p$, et $|.|_p$ la distance associée. On introduit les relations d'équivalences suivantes :

$$(\Pi_k) \qquad\qquad x \,\Pi_k\, y \iff v(x , y) \geqslant k \quad ;$$

on posera $M_k = \mathbb{Z}_p/\Pi_k$, on appellera $\alpha_1 , \ldots , \alpha_{p^k}$ des représentants de M_k . Ils peuvent être considérés comme les centres des p^k boules de rayons $(\frac{1}{p})^k$ recouvrant $\mathbb{Z}_p$. On notera pr_k la projection canonique de $\mathbb{Z}_p$ sur M_k . On notera $V_k(\alpha)$ la boule de centre α et de rayon $(\frac{1}{p})^k$.

DÉFINITION 2. - Une suite u à valeurs dans $\mathbb{Z}_p$ est bien répartie d'ordre h (Br h) si, et seulement si, la suite $pr_i \circ u$ est bien répartie dans M_i pour tout $i \leqslant h$.

On pose $\nu_u(\alpha , n , k) = \mathrm{Card}\{u^{-1}(V_k(\alpha)) \cap [0 , n - 1]\}$. La définition 2 se traduit par

$$\nu_u(\alpha , n , k) \geqslant [\frac{n}{p^k}] , \qquad \forall\, 1 \leqslant k \leqslant h \quad .$$

DÉFINITION 3. - <u>Une suite</u> u <u>à valeurs dans</u> $\mathbb{Z}_p$ <u>est très bien répartie</u> (TBR), <u>si elle est bien répartie d'ordre</u> h <u>pour tout</u> $h \geqslant 1$.

PROPOSITION 1. - <u>Une suite</u> u <u>est bien répartie d'ordre</u> h <u>dans</u> $\mathbb{Z}_p$ <u>si, et seulement si, elle satisfait à l'une des quatre conditions suivantes</u> :

(Br h (1)) <u>Quels que soient</u> $n \geqslant 1$ <u>et</u> $1 \leqslant k \leqslant h$,

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_p} \{\nu(\alpha , n , k)\} - \inf_{\alpha \in \mathbb{Z}_p} \{\nu(\alpha , n , k)\} \leqslant 1 \quad ;$$

(Br h (2)) $\forall\, \alpha \in \mathbb{Z}_p$, $\forall\, m \geqslant 1$, $\forall\, 1 \leqslant k \leqslant h$,

$$\nu(\alpha , mp^k , k) = m \quad ;$$

(Br h (3)) $\forall\, \alpha \in \mathbb{Z}_p$, $\forall\, n \geqslant 1$, $\forall\, 1 \leqslant k \leqslant h$,

$$\nu(\alpha , n , k) \geqslant \left[\frac{n}{p^k}\right] \quad ;$$

(Br h (4)) $\forall\, \alpha \in \mathbb{Z}_p$, $\forall\, n \geqslant 1$, $\forall\, 1 \leqslant k \leqslant h$,

$$\nu(\alpha , n , k) \leqslant \left[\frac{n-1}{p^k}\right] + 1 \quad .$$

Il est immédiat que la condition (Br h (3)) est équivalente à la définition (Br h).

On va montrer l'équivalence des quatre conditions dans l'ordre suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & (3) \arrow[dr, Rightarrow] & \\
(2) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & & (2) \\
(1) \arrow[rr, Rightarrow] & & (4) \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd} \quad .$$

$(2) \Rightarrow (3)$, $(2) \Rightarrow (1)$: Soient $n \geqslant 1$, $k \leqslant h$, et $m = \left[\frac{n}{p^k}\right]$. $mp^k \leqslant n < (m+1)p^k$, donc

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{Z}_p , \qquad \nu(\alpha , mp^k , k) \leqslant \nu(\alpha , n , k) \leqslant \nu(\alpha , (m+1)p^k , k) \quad ;$$

appliquons (Br h (2)), il vient $m \leqslant \nu(\alpha , n , k) \leqslant (m+1)$, donc

$$\left[\frac{n}{p^k}\right] \leqslant \nu(\alpha , n , k) \leqslant 1 + \left[\frac{n}{p^k}\right] \quad ,$$

ce qui démontre (Br h (3)) et (Br h (1)).

(1) $\Longrightarrow$ (4) : Soient $n \geqslant 1$ et $k \leqslant h$, posons $\xi = \inf_{\alpha \in \mathbb{Z}_p} \nu(\alpha , n , k)$, alors

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_p} \nu(\alpha , n , k) \leqslant \xi + 1 \quad .$$

$\alpha_1 , \dots , \alpha_{p^k}$ sont des représentants de M_k , donc

$$\sum_{i=1}^{p^k} \nu(\alpha_i , n , k) = n \implies p^k \xi \leqslant n \leqslant p^k(\xi + 1) ,$$

donc $\xi \leqslant [\frac{n}{p^k}] \leqslant \xi + 1$:

- ou bien $[\frac{n}{p^k}] = [\frac{n-1}{p^k}]$, et alors (Br h (4)) est vrai ;
- ou bien $[\frac{n}{p^k}] = [\frac{n-1}{p^k}] + 1 \implies n = mp^k$, donc $\xi = m$, et si on avait

$\sup\limits_{\alpha\in \mathbb{Z}_p} \nu(\alpha , n , k) = m + 1$, il viendrait

$$\sum_{i=1}^{p^k} \nu(\alpha_i , n , k) \geqslant m + 1 + (p^k - 1)m = n + 1 ,$$

ce qui est absurde, donc (Br h (4)) est vrai.

(3) $\implies$ (2) : $\nu(\alpha , mp^k , k) \geqslant m$, et s'il existait α_i tel que

$$\nu(\alpha_i , mp^k , k) \geqslant m + 1 ,$$

alors il viendrait

$$\sum_{i=1}^{p^k} \nu(\alpha_i , n , k) \geqslant n + 1 ,$$

ce qui est absurde, donc $\nu(\alpha , mp^k , k) = m$.

(4) $\implies$ (2) : $\nu(\alpha , mp^k , k) \leqslant m$, et s'il existait α_i tel que

$$\nu(\alpha_i , mp^k , k) \leqslant m - 1 ,$$

alors on aurait

$$\sum_{i=1}^{p^k} \nu(\alpha_i , mp^k , k) \leqslant (m - 1) + m(p^k - 1) = mp^k - 1 ,$$

ce qui est absurde.

COROLLAIRE. - Une suite est très bien répartie dans $\mathbb{Z}_p$ si, $\forall\, m \geqslant 0$ et $\forall\, k \geqslant 1$, l'ensemble des u_n , avec $n = j + mp^k$, $0 \leqslant j < p^k$, forme un système de représentants de M_k .

Construction de suites très bien réparties. - Soit une suite finie

$$S_n = \{u_0 , \dots , u_{n-1}\} .$$

On dit qu'elle satisfait à $(\mathcal{P}_n)$ si

$$(\mathcal{P}_n) \qquad \left.\begin{cases} 1 \leqslant j \leqslant n \\ \alpha \in \underset{\sim}{Z}_p \\ k \geqslant 1 \end{cases}\right\} \Longrightarrow \left[\frac{j}{p^k}\right] \leqslant \nu(\alpha , j , k) \leqslant 1 + \left[\frac{j-1}{p^k}\right] ;$$

il est immédiat que

$$u \text{ très bien répartie } \Longleftrightarrow S_n(u) \text{ satisfait à } (\mathcal{P}_n), \ \forall n .$$

PROPOSITION 2. - Les quatre conditions suivantes sont équivalentes : Soit S_n satisfaisant à $(\mathcal{P}_n)$, et soit $x \in \underset{\sim}{Z}_p$, on pose

$$v_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} v(x , u_i) ;$$

(i) $v_n(x) = \inf\limits_{y \in \underset{\sim}{Z}_p} v_n(y)$;

(ii) $v_n(x) = \sum\limits_{k \geqslant 1} \left[\frac{n}{p^k}\right]$;

(iii) $\forall k \geqslant 1 , \quad \nu(x , n , k) = \left[\frac{n}{p^k}\right]$;

(iv) La suite $S_n \cup \{x\}$ satisfait à $(\mathcal{P}_{n+1})$.

De plus, l'ensemble E_n des x appartenant à $\underset{\sim}{Z}_p$, et vérifiant l'une de ces quatre propriétés, est ouvert et compact, et si $n = n_0 + n_1 p + \dots + n_h p^h$ avec $0 \leqslant n_i < p$, on a

$$\mu(E_n) = \prod_{j=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{n_j}{p}\right) ,$$

où μ est la mesure définie de la manière suivante : $\mu(V_k(\alpha)) = \frac{1}{p^k}$.

Démonstration. - (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) .

$$(\mathcal{P}_{n+1}) \Longrightarrow \nu(x , n+1 , k) \leqslant 1 + \left[\frac{n+1-1}{p^k}\right] ,$$

or $\nu(x , n , k) = \nu(x , n+1 , k) - 1$, $\left[\frac{n}{p^k}\right] \leqslant \nu(x , n , k) \leqslant \left[\frac{n}{p^k}\right]$, donc

$$\nu(x , n , k) = \left[\frac{n}{p^k}\right] .$$

Réciproquement, si on a $\forall\, k \geqslant 1$, $\nu(x , n , k) = [\frac{n}{p^k}]$, fixons k , et soit $\alpha \in \underset{\sim}{Z}_p$,

$$\nu(\alpha , n+1 , k) = \begin{cases} \nu(\alpha , n , k) , & \text{si } \alpha \notin V_k(x) , \\ \nu(x , n+1 , k) , & \text{si } \alpha \in V_k(x) , \\ = 1 + [\frac{n}{p^k}] \ ; & \end{cases}$$

- ou bien $[\frac{n+1}{p^k}] = [\frac{n}{p^k}]$, et par conséquent

$$[\frac{n+1}{p^k}] \leqslant \nu(\alpha , n+1 , k) \leqslant 1 + [\frac{n}{p^k}] ,$$

et $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vrai ;

- ou bien $[\frac{n+1}{p^k}] = 1 + [\frac{n}{p^k}]$, et on a encore

$$\forall\, \alpha \in \underset{\sim}{Z}_p , \qquad \nu(\alpha , n+1 , k) \leqslant 1 + [\frac{n}{p^k}] .$$

Montrons que l'on a aussi $\nu(\alpha , n+1 , k) \geqslant [\frac{n+1}{p^k}] = m$. Soit $\alpha_1 , \dots , \alpha_{p^k}$ des représentants de M_k , et supposons que $x \in V_k(\alpha_1)$, donc

$$\nu(\alpha_1 , n , k) = m - 1 ,$$

$$\sum_{i=2}^{p^k} \nu(\alpha_i , n , k) = n - (m-1) = m(p^k - 1) ,$$

or $\forall\, i$, $\nu(\alpha_i , n , k) \leqslant m$, donc, pour $i = 2 , \dots , p^k$,

$$\nu(\alpha_i , n , k) = m ,$$

et donc aussi

$$\nu(\alpha_1 , 1+n , k) = m .$$

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) . - Le nombre d'indices $j \leqslant n-1$, tels que $v(x , u_j) = k$, est égal à $\nu(x , n , k) - \nu(x , n , k+1)$, car $\nu(x , n , k)$ est le nombre d'indices $j \leqslant n-1$, tels que $v(x , u_j) \geqslant k$. Donc

$$v_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(\nu(x , n , k) - \nu(x , n , k+1)) ,$$

$$v_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(x , n , k) ,$$

alors

$$\mathcal{P}_n(x) \implies v_n(x) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} [\frac{n}{p^k}] , \qquad \forall\, x \in M ,$$

et

$$v_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [\frac{n}{p^k}] \iff \nu(x , n , k) = [\frac{n}{p^k}] , \qquad \forall\, k \geqslant 1 .$$

(i) $\iff$ (iii) . - On va montrer que $\inf v_n(y) = \sum_{k\geqslant 1} [\frac{n}{p^k}]$. On va étudier pour cela l'ensemble E_n des éléments satisfaisant à (iii). Soit h tel que

$$p^h \leqslant n < p^{h+1} ,$$

on écrit $n = n_0 + n_1\, p + \dots + n_h\, p^h$, $0 \leqslant n_i < p$,

$$\forall\, \alpha \in \underset{\sim}{Z}_p , \qquad [\frac{n}{p}] \leqslant \nu(\alpha , n , 1) \leqslant 1 + [\frac{n}{p}] ,$$

donc, parmi les p disques disjoints $V_1(\alpha_i)$ recouvrant $\underset{\sim}{Z}_p$, il y en a n_0 qui contiennent $1 + [\frac{n}{p}]$ points de S_n et $p - n_0$ qui en contiennent $[\frac{n}{p}]$. Notons $\mathcal{E}_{1,n} = \{x \mid \nu(x , n , 1) = [\frac{n}{p}]\}$. $\mathcal{E}_{1,n}$ est réunion de $p - n_0$ disques $V_1(\alpha_i)$; plus généralement, notons

$$\mathcal{E}_{k,n} = \{x \mid \nu(x , n , h) = \frac{n}{p^h} , \ \forall\, k \leqslant h\} ,$$

$$E_n = \cap\, \mathcal{E}_{k,n} = \mathcal{E}_{h+1,n} .$$

Supposons que, pour $j \leqslant h$, $\mathcal{E}_{j,n}$ soit réunion disjointe de

$$(p - n_0)(p - n_1)\dots(p - n_{j-1})$$

disques $V_j(\alpha)$ (ce qui est vrai pour $j = 1$), alors, pour $\alpha \in \mathcal{E}_{j,n}$, $V_j(\alpha)$ est réunion de p boules $V_{j+1}(\alpha_i)$, parmi lesquelles il y en a n_j qui contiennent $1 + [\frac{n}{p^j}]$ points de S_n , et $p - n_j$ qui en contiennent $[\frac{n}{p^j}]$, donc $V_j(\alpha) \cap \mathcal{E}_{j+1,n}$ est réunion disjointe de $p - n_j$ boules $V_{j+1}(\alpha_i)$, et ceci pour tout $\alpha \in \mathcal{E}_{j,n}$, ce qui montre que $E_n = \mathcal{E}_{h+1,n}$ est réunion disjointe de

$$(p - n_0)\dots(p - n_h)$$

disques $V_{h+1}(\alpha_i)$; c'est donc un ouvert compact de mesure

$$\mu(E_n) = \prod_{j=0}^{\infty} (1 - \frac{n_i}{p}) \neq 0 ,$$

donc E_n n'est pas vide, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1. - <u>Pour que</u> u <u>soit très bien répartie dans</u> $\underset{\sim}{Z}_p$, <u>il faut et il suffit que, pour</u> $n \geqslant 1$,

$$v_n(u_n) = \sum_{k\geqslant 1} [\frac{n}{p^k}] \ .$$

COROLLAIRE 2. - <u>Pour que</u> u <u>soit très bien répartie dans</u> $\underset{\sim}{Z}_p$, <u>il faut et il suffit que, pour</u> $n \geqslant 1$, <u>on ait</u>

$$v_n(u_n) = \inf_{x\in M} v_n(x) \ .$$

<u>Exemples de suites très bien réparties.</u>

- La suite des entiers naturels est très bien répartie, c'est évident en appliquant le corollaire 1.
- Les suites $p^i \underset{\sim}{N}$ sont aussi très bien réparties, c'est évident en appliquant le corollaire 2.

<u>Traduction de ces résultats en terme de polynômes</u> P_n <u>et</u> Q_n <u>et de valeur absolue.</u>

$$P_n(X) = (X - u_0)(X - u_1)\dots(X - u_{n-1}) \ ,$$

$$Q_n(X) = \frac{P_n(X)}{P_n(u_n)} \ ,$$

ce qui nécessite que la suite u soit injective, mais il est évident que toute suite très bien répartie est injective en appliquant le corollaire 2.

COROLLAIRE 1 <u>bis</u>. - <u>Soit</u> $S_n = \{u_0 , \dots , u_{n-1}\}$ <u>satisfaisant à</u> $(\wp_n)$, <u>alors</u>

$$\sup_{x\in \underset{\sim}{Z}_p} |P_n(x)|_p = (\frac{1}{p})^{\lambda_n} \ , \qquad \underline{\text{où}}\ \lambda_n = \sum_{k\geqslant 1} [\frac{n}{p^k}] \ .$$

C'est la traduction de la proposition 2.

COROLLAIRE 2 <u>bis</u>. - <u>Soit</u> S_n <u>satisfaisant à</u> $(\wp_n)$, <u>alors</u> $S_n \cup \{u_n\}$ <u>satisfait à</u> $(\wp_{n+1})$ <u>si, et seulement si,</u>

$$|P_n(u_n)|_p = \sup_{x\in \underset{\sim}{Z}_p} |P_n(x)|_p \ .$$

C'est le corollaire 1.

COROLLAIRE 3 *bis*. - *Pour que* u *soit très bien répartie dans* $\mathbb{Z}_p$, *il faut et il suffit que, pour* $n \geqslant 0$,

$$\sup_{x \in \mathbb{Z}_p} |Q_n(x)|_p = 1 \quad .$$

COROLLAIRE 4 *bis*. - *Soit* u *une suite très bien répartie dans* $\mathbb{Z}_p$, *et soit* $n < p^h$, *alors*

$$x \in V_h(a) \implies |Q_n(x) - Q_n(a)|_p < 1 \quad .$$

En effet, si $|Q_n(a)| = 1$, alors $a \in E_n$, donc

$$\nu(a , n , h) = [\frac{n}{p^h}] = 0 \quad ,$$

alors, pour $x \in V_h(a)$,

$$|x - a|_p \leqslant \frac{1}{p} |a - u_j|_p$$

$$\implies \forall\ j < n \ , \quad |\frac{x - u_j}{x - a} - 1|_p \leqslant \frac{1}{p}$$

$$\implies |Q_n(X) - Q_n(a)|_p \leqslant \frac{1}{p} \quad ,$$

car $|Q_n(a)|_p = 1$ si $|Q_n(a)|_p < 1$, alors il n'existe pas $x \in V_h(a)$ tel que $|Q_n(x)| = 1$, car sinon $|Q_n(a)|_p = 1$. Donc $\forall\ x \in V_h(a)$,

$$|Q_n(x)|_p < 1 \implies |Q_n(x) - Q_n(a)|_p < 1 \quad .$$

2. Interpolation des fonctions continues de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Q}_p$.

DÉFINITION. - *Une famille* $(e_i)_{i \in I}$ *d'éléments d'un Banach* E *sur* $\mathbb{Q}_p$ *est appelée une base normale de* E , *si elle satisfait à* :

Tout $y \in E$ *est de façon unique la somme d'une série* $y = \sum_{i \in I} y_i\, e_i$, $y_i \in \mathbb{Q}_p$, et $|y_i|_p$ *tend vers* 0 *suivant le filtre des complémentaires des parties finies*

$$|y|_p = \sup_{i \in I} |y_i|_p \quad .$$

On notera $E_0 = \{x \in E \mid |x| \leqslant 1\}$, $\overline{E} = \dfrac{E_0}{pE_0}$, si $x \in E_0$; on notera $\overline{x}$ son image dans $\overline{E}$.

On a alors la propriété suivante (cf. [4]) :

<u>Une condition nécessaire et suffisante pour que</u> $(e_i)_{i\in I}$ <u>soit une base normale de</u> E <u>est que</u> :

1° $\forall\, i \in I$, $e_i \in E_0$;
2° $(\bar{e}_i)_{i\in I}$ <u>est une base algébrique du</u> $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$-<u>espace vectoriel</u> $\bar{E}$.

On notera $E = \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p , \mathbb{Q}_p)$. Soit une suite injective u à valeurs dans $\mathbb{Z}_p$, et, à une fonction $f \in E$, on associe la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ des polynômes d'interpolation sur u définie par :

$$f_n(X) \in \mathbb{Q}_p[X] \ ,$$

$$\text{degré } f_n \leq n \ ,$$

$$f_n(u_j) = f(u_j) \ , \qquad \text{pour } j = 0 , \dots , n \ .$$

On écrit

$$f_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, Q_k(X) \qquad \text{(NEWTON)} \ ,$$

avec

$$a_k = \Big(\sum_{j=0}^{k} \frac{f(u_j)}{P'_{k+1}(u_j)}\Big)\, P_k(u_k) \qquad \text{(LAGRANGE)} \ .$$

On dira que u est une suite d'interpolation pour les fonctions de E à valeurs entières, si :

1° $\forall\, f \in E$, $|f - f_n| \to 0$ lorsque $n \to +\infty$;
2° $|f| \leq 1 \implies |f_n| \leq 1$, $\forall\, n \geq 0$.

THÉORÈME. - <u>Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(a) u <u>est une suite d'interpolation pour les fonctions appartenant à</u> E <u>et à valeurs entières</u> ;
(b) $|Q_n| = 1$ <u>pour tout</u> $n \geq 0$;
(c) u <u>est très bien répartie dans</u> $\mathbb{Z}_p$;
(d) $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>est une base normale de</u> E .

(d) $\implies$ (a) . - Soit $f = \sum_{n\geq 0} a_n Q_n$ la décomposition de f sur la base Q_n , et soit

$$f_n^*(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, Q_k \ .$$

On a $Q_n(u_j) = 0$, si $j < n$; donc, pour $j \leqslant n$,

$$f(u_j) = \sum_{k=0}^{j} a_k \, Q_k(u_j) = f_n^*(u_j) \quad ,$$

donc $f_n^* = f_n$, de plus $|a_n|_p \to 0$ quand $n \to +\infty$ entraîne $|f - f_n|_p \to 0$, de plus $|f| = \sup_{n\geqslant 0} |a_n|$ entraîne $|f_n| \leqslant |f|$, ce qui achève la démonstration.

(a) $\Longrightarrow$ (b) . - $Q_n(u_n) = 1$, donc $|Q_n| \geqslant 1$, et soit, pour n fixé, q la fonction caractéristique du disque de centre u_n ne contenant aucun u_j tel que $j < n$. Or q est continue, et son $(n + 1)$-ième polynôme d'interpolation est $Q_n(X)$, donc $|Q_n| \leqslant 1$.

(b) $\Longrightarrow$ (c) . - Le corollaire 3 bis s'énonce (b) $\Longleftrightarrow$ (c) .

(c) $\Longrightarrow$ (d) . - On montre que $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait à la condition (Q), c'est-à-dire que $(\overline{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\overline{E}$. Or $\overline{E}$ est réunion des $\overline{E}_h$ pour $h \geqslant 1$, où $\overline{E}_h$ désigne le sous-espace de $\overline{E}$ des fonctions à valeurs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, constante sur toute boule V_h . On prendra $u_0 , \ldots , u_{p^h-1}$ comme représentant de M_h , et $\chi_{i,h}$ sera la fonction caractéristique de $V_h(u_{i+1})$: $(\overline{\chi}_{i,h})_{i=1,\ldots,p^h}$ est une base de $\overline{E}_h$, montrons que l'on a

$$\overline{Q}_i = \overline{\chi}_{i,h} + \sum_{j=i+1}^{p^h-1} \overline{Q_i(u_{j-1})} \, \overline{\chi_{j,h}} \; , \qquad \text{pour } 0 \leqslant i < p^h \; .$$

Or le corollaire 4 bis montre que, pour $n < p^h$, $\overline{Q}_n$ est dans $\overline{E}_h$, donc

$$\overline{Q}_i = \sum_{j=0}^{p^h-1} \overline{Q_i(u_{j-1})} \, \chi_{j,h} \quad ,$$

or, comme pour $j \leqslant i$, $Q_i(u_{j-1}) = 0$, on a bien l'égalité annoncée ; or la matrice de $\overline{Q}_i$ en fonction des $\chi_{i,h}$ est triangulaire avec des 1 sur la diagonale, elle est donc inversible. Les $(Q_n)_{n>0}$ forment donc une base normale de E .

COROLLAIRE 1. - Soit f une fonction définie sur une suite u très bien répartie dans $\mathbb{Z}_p$. Pour que f soit prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{Z}_p$, il faut et il suffit que

$$\lim_{k\to 0} |a_k|_p = 0 \; , \qquad \underline{\text{où}} \;\; a_k = P_k(u_k)\Big(\sum_{j=0}^{k} \frac{f(u_j)}{P'_{k+1}(u_j)}\Big) \quad .$$

COROLLAIRE 2. - Prenons comme suite la suite des entiers naturels, il vient $Q_n(x) = \binom{x}{n}$, et on retrouve le théorème de Mahler.

Application. - Pour que l'application $n \to \alpha^n$ de $\mathbb{Z}_p$ dans Ω (clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$) soit prolongeable en une fonction continue α^x sur $\mathbb{Z}_p$, il faut et il suffit que

$$v(\alpha - 1) > 0 \quad ,$$

on a alors

$$\alpha^x = \sum_{n \geqslant 1} (\alpha - 1)^n \binom{x}{n}$$

(α est une unité de Ω).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Yvette). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

[2] MAHLER (K.). - An interpolation series for a continuous fonction of a p-adic variable, J. für reine und angew. Math., t. 199, 1958, p. 23-34.

[3] PISOT (Charles). - Analyse p-adique et ensembles remarquables d'adèles algébriques, Cours rédigé par Simon Bloch. - Paris, Faculté des Sciences de Paris, Département de Mathématiques, 1967 (multigraphié).

[4] SERRE (Jean-Pierre). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, 12, p. 69-85).