Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Jacques Lesca

Sur la répartition modulo 1 des suites $(n\alpha)$

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 8, n° 1 (1966-1967), exp. n° 2, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1966-1967__8_1_A2_0>

SUR LA RÉPARTITION MODULO 1 DES SUITES $(n\alpha)$

par Jacques LESCA

1. Introduction.

Notations et définitions. - T est le cercle de longueur 1, orienté, muni d'une origine.

La classe modulo 1 d'un nombre réel x est identifiée au point d'abscisse x de T.

La partie fractionnaire d'un point $\beta \in T$ est la partie fractionnaire d'un quelconque des nombres réels b de la classe β. On écrit, pour $b \in R$, $\beta =$ classe de b :

$$\{\beta\} = \{b\} = b - [b] = b - \max\{x \in Z \ ; \ x \leqslant b\} \ .$$

Un intervalle de T est une partie connexe de T. Nous utilisons pour les intervalles les notations suivantes :

Si $\beta , \gamma \in T$, $\beta \neq \gamma$,

$$]\beta , \gamma] = \{x \in T \ ; \ 0 < \{x - \beta\} \leqslant \{\gamma - \beta\}\} \ ,$$

$$[\beta , \gamma[= \{x \in T \ ; \ 0 \leqslant \{x - \beta\} < \{\gamma - \beta\}\} \ .$$

Soient $(x_n)_{n\in N^*}$, une suite de points de T, I un intervalle de T, et $n \in N^*$. $\Pi(I , n)$ est le nombre de points appartenant à I parmi les n premiers points de la suite, et le " n-ième reste" est le nombre réel :

$$E(I , n) = \Pi(I , n) - n|I| \ .$$

($|I|$ désignant la longueur de l'intervalle I .)

Remarque 1. - Si pour une suite (x_n), pour tout intervalle I de T,

$$E(I , n) = o(n) \ ;$$

on dit que la suite est équirépartie.

Remarque 2. - Pour toute suite, il existe des intervalles pour lesquels la "suite des restes" est non bornée [1].

---

[1] Résultat que je pense publier prochainement, et qui répond à une question de P. ERDÖS dans [3].

Ce qui suit concerne exclusivement une suite $(n\alpha)$ de points de T , α irrationnel fixé une fois pour toutes. Nous nous intéressons au problème :

"Quels sont les intervalles de T pour lesquels la suite des restes est bornée ?"

Ce problème n'est pas complètement résolu ; on peut cependant montrer les théorèmes suivants.

THÉORÈME I. - Si les deux extrémités β , γ d'un intervalle appartiennent à $Z\alpha$, alors la suite des restes de cet intervalle est bornée.

THÉORÈME II. - Si les deux extrémités β , γ d'un intervalle sont telles que : $\gamma - \beta \in Z\alpha$, alors la suite des restes est bornée.

THÉORÈME III. - Si un intervalle a pour extrémités 0 et β , avec $\beta \notin Z\alpha$, alors la suite des restes est non bornée.

Le théorème I est un cas particulier du théorème II. Il a été démontré, en 1922, par HECKE [4], puis, en 1927, par OSTROWSKI [6].

Nous démontrerons le théorème II comme application de la "relation de réciprocité" ci-dessous (en même temps que deux autres applications qui sortent légèrement du sujet principal de cet exposé). Nous donnerons des indications pour une démonstration du théorème III, et, pour finir nous examinerons le problème restant à résoudre.

2. Relation de réciprocité.

THÉORÈME IV (Relation de réciprocité). - Soient $\beta \in T$ et $u , v \in N$, alors :

$$E^+(]\beta , \beta + u\alpha] , v) = E^-([- \beta , - \beta + v\alpha[, u) \quad . \tag{1}$$

($E^+(I , n) = E(I , n)$ pour la suite $u_n = n\alpha$ $(n \in N^*)$, $E^-(I , n) = E(I , n)$ pour la suite $u_n = (n - 1)\alpha$ $(n \in N^*)$.)

Adoptons encore les notations suivantes : $\beta \in T$, $v \in N$,

$$\varphi^+(\beta , v) = E^+(]0 , \beta] , v) \quad ,$$

$$\varphi^-(\beta , v) = E^-([0 , \beta[, v) \quad .$$

Si on fait $\beta = 0$, le théorème devient :

COROLLAIRE. - Pour $u , v \in N$,

$$\varphi^+(u\alpha , v) = \varphi^-(v\alpha , u) \quad . \tag{2}$$

Nous ne démontrons que le corollaire, la démonstration du théorème est identique, mais les notations sont légèrement plus lourdes.

Démonstration.

1° Supposons $0 < \alpha < 1$, ce qui ne restreint pas la généralité. Utilisons un mobile m qui parcourt T à la vitesse α et marque un point chaque seconde.

2° Introduisons une généralisation de la notion d'intervalle de T .

L'intervalle généralisé $\overline{I} = \overline{)0 , u\alpha)}$, par exemple, est la "réunion" des intervalles $I_n =)n\alpha , (n+1)\alpha)$ $(n = 0 , 1 , \ldots , u-1)$; sa mesure est $u\alpha$.

Pour l'intervalle généralisé $\overline{I}$, $\overline{\Pi}^+(\overline{I} , v)$ se définit comme Π^+ , mais en comptant les points : 1 fois quand la partie correspondante de l'intervalle est simple, 2 fois quand la partie correspondante de l'intervalle est double, 3 fois quand la partie correspondante de l'intervalle est triple, etc.

On vérifie, dans le cas particulier considéré :

$$\overline{\Pi}^+(\overline{I} , v) = \overline{\Pi}^+(\overline{)0 , u\alpha)} , v) = \sum_{n=0}^{u-1} \{\Pi^+(I_n , v)\} .$$

Le "reste" devient :

$$\overline{E}(\overline{I} , v) = \overline{\Pi}(\overline{I} , v) - |\overline{I}| ,$$

$|\overline{I}|$ notant la mesure de l'arc généralisé.

Dans le cas particulier considéré ci-dessus,

$$\overline{E}^+(\overline{I} , v) = \overline{E}^+(\overline{)0 , u\alpha)} , v) = \sum_{n=0}^{u-1} \{\Pi^+(I_n , v)\} - uv\alpha . \tag{3}$$

3° Il est clair que, si $\overline{I}$ est un intervalle généralisé, et I l'intervalle, au sens habituel, correspondant,

$$\overline{E}(\overline{I} , v) = E(I , v) .$$

En particulier :

$$\varphi^+(u\alpha , v) = \overline{E}^+(\overline{I} , v) = \sum_{n=0}^{u-1} \{\Pi^+(I_n , v)\} - uv\alpha . \tag{4}$$

4° Pour $\beta \in T$, et pour l'intervalle $I =)\beta , \beta + \alpha)$, on a :

$$\overline{\Pi}^+(\overline{I} , v) = \Pi^+(I , v) = \begin{cases} [v\alpha] & , \text{ si } \beta \notin [0 , v\alpha[\\ [v\alpha] + 1 & , \text{ si } \beta \in [0 , v\alpha[\end{cases} . \tag{5}$$

Pour voir cela, il suffit de remarquer que le mobile m marque exactement un point dans I à chaque tour. Le nombre de tours complets qu'il effectue est $[v\alpha]$; il marque un point supplémentaire si, et seulement si :

$$\{v\alpha\} > \{\beta\} \quad ,$$

c'est-à-dire :

$$\beta \in [0\ ,\ v\alpha[\quad .$$

5° Calculons enfin $\varphi^+(u\alpha\ ,\ v)$. Utilisons (4) et (5).

$$\varphi^+(u\alpha\ ,\ v) = \overline{E}^+(\overline{]0\ ,\ u\alpha]}\ ,\ v) = \sum_{n=0}^{u-1} \{\Pi^+(I_n\ ,\ v)\} - uv\alpha$$

$$= u[v\alpha] + \Pi^-([0\ ,\ v\alpha[\ ,\ u) - uv\alpha$$

$$= \Pi^-([0\ ,\ v\alpha[\ ,\ u) - u\{v\alpha\}$$

$$= \varphi^-(v\alpha\ ,\ u) \quad .$$

C. Q. F. D.

3. Applications de la relation de réciprocité.

(a) Démonstration du théorème II. - Pour tout intervalle I , et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|E(I\ ,\ n)| \leqslant \max\{|I|n\ ,\ n\} \leqslant n \quad ,$$

et par conséquent, si $u\ ,\ v \in \mathbb{N}^*$, en utilisant (1), on obtient :

$$|E^+(]\beta\ ,\ \beta + u\alpha]\ ,\ v)| = |E^-([-\beta\ ,\ -\beta + v\alpha[\ ,\ u)| \leqslant u \quad .$$

Si u est négatif, on remarque que $I =]\beta\ ,\ \beta + u\alpha]$ a pour complémentaire $I' =]\beta + u\alpha\ ,\ \beta]$, et on a :

$$E(I\ ,\ v) = -E(I'\ ,\ v) \quad ,$$

ce qui permet d'écrire :

$$|E^+(]\beta\ ,\ \beta + u\alpha]\ ,\ v)| \leqslant |u| \quad .$$

Si $\beta\ ,\ \gamma \in T$ et si $\gamma - \beta = u\alpha$ $(u \in \mathbb{Z})$, on a donc, pour tout $v \in \mathbb{N}^*$,

(6) $$|E^+(]\beta\ ,\ \gamma]\ ,\ v)| \leqslant |u| \quad .$$

(b) Démonstration du fait que la suite $(n\alpha)$ est "équirépartie" [2]. - Posons :

$$D(n) = \sup_{\beta \in T} \{|\varphi^+(\beta\ ,\ n)|\}/n \quad .$$

---

[2] Les parties (b) et (c) du § 3 sortent légèrement du cadre assigné, dans l'introduction à cet exposé.

Il suffit de prouver que $D(n) = o(n)$.

Pour $u \in N$, désignons par $\lambda(u)$ la longueur du plus grand des intervalles déterminés sur T par les u points $0 , \alpha , \dots , (u-1)\alpha$.

Un point $\beta \in T$ appartient à un intervalle $[r\alpha , s\alpha[$ $(r , s < u)$ de longueur non supérieure à $\lambda(u)$.

On a, pour tout $n \in N$,

$$\Pi^{+}(]r\alpha , \beta] , n) \leqslant \Pi^{+}(]r\alpha , s\alpha] , n) \leqslant |E^{+}(]r\alpha , s\alpha] , n)| + n\lambda(u) .$$

On en déduit, en utilisant (6) :

$$\Pi^{+}(]r\alpha , \beta] , n) \leqslant u + n\lambda(u) . \tag{7}$$

D'autre part,

$$|E^{+}(]r\alpha , \beta] , n)| \leqslant \max\{\Pi^{+}(]r\alpha , \beta] , n) , n\lambda(u)\} ,$$

et d'après (7),

$$|E^{+}(]r\alpha , \beta] , n)| \leqslant u + n\lambda(u) . \tag{8}$$

On a enfin,

$$\varphi^{+}(\beta , n) = \varphi^{+}(r\alpha , n) + E^{+}(]r\alpha , \beta] , n) .$$

Et en utilisant (6) et (8),

$$|\varphi^{+}(\beta , n)| \leqslant 2u + n\lambda(u) . \tag{9}$$

Il est clair ($N\alpha$ est partout dense dans T) que $\lambda(u) = o(u)$, et le résultat cherché se déduit facilement de (9).

Remarque. - L'inégalité (9) permet d'obtenir une majoration de la "discrépance" de la suite $(n\alpha)$ quand les quotients partiels de α sont bornés, mais il ne semble pas qu'on puisse obtenir ainsi une "bonne majoration".

(c) Majoration de $\beta \to |\varphi^{+}(\beta , n)|$ pour certaines valeurs de n .

THÉORÈME V. - Soit q_n $(n \in N^{*})$ le dénominateur du n-ième convergent de α (correspondant au développement de α en fraction continue). Alors, pour tout $\beta \in T$:

$$- 1 < \varphi^{+}(\beta , q_n) < 1 . \tag{10}$$

Démonstration.

1° Pour $u \in N^{*}$, $u \leqslant q_n$:

(11) $$0 < \varphi^{-}(q_n \alpha , u) < 1 .$$

Il suffit, pour obtenir (11), d'utiliser la définition de φ^{-} et le fait qu'aucun des points α , 2α , ... , $(u - 1)\alpha$ n'appartient à $]0 , q_n]$.

2° Pour tout $\beta \in T$,

(12) $$\min\{\varphi^{+}(u\alpha , q_n) ; u = 1 , 2 , \ldots , q_n\} < \varphi^{+}(\beta , q_n) \leqslant \max\{\varphi^{+}(u\alpha , q_n) ; u = 1 , 2 , \ldots , q_n\} .$$

Pour vérifier (12), on remarque que la fonction $\beta \rightarrow \varphi^{+}(\beta , q_n)$:

est continue à droite pour tout β ,

est discontinue aux points α , 2α , ... , $q_n \alpha$ (elle fait en chacun de ces points un saut positif de 1),

est linéaire (de pente $- q_n$) entre deux points de discontinuité.

3° Les inégalités (10) sont conséquences immédiates de (12), de la relation de réciprocité, et de (11).

COROLLAIRE. - $\liminf_{n \to \infty} \{n\ D(n)\} \leqslant 1$.

4. Le théorème III (Indications pour une démonstration).

1° Développement de β par rapport à α . - Soient (p_n/q_n) la suite des convergents du développement de α en fraction continue, et (a_n) la suite des quotients partiels.

On pose :

$$\theta_n = q_n \alpha - p_n \qquad (n \in N^{*}) .$$

La suite (θ_n) est alternée et tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Développer β par rapport à α , consiste à déterminer une suite d'entiers (b_n) telle que :

$$\beta \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \{b_n \theta_n\} = \lim_{n \to \infty} \{r_n \alpha\} \qquad \text{avec } r_n = \sum_{u=1}^{n} \{b_u q_u\} .$$

Cela peut être fait d'une infinité de manières ; mais si on impose :

$$\begin{cases} 0 \leqslant b_1 \leqslant a_1 - 1 \\ 0 \leqslant b_n \leqslant a_n \quad (n = 2\ ,\ 3\ ,\ \dots) \\ b_n = a_n \implies b_{n-1} = 0 \quad (n = 2\ ,\ 3\ ,\ \dots) \\ \text{Il n'existe pas d'indice } u \text{ impair tel que} \\ \qquad b_n = a_n\ ;\ b_{n+1} = 0 \quad (n = u\ ,\ u+2\ ,\ u+4\ ,\ \dots)\ , \end{cases}$$

alors, le développement existe et il est unique.

Un tel développement est dit "distingué".

Remarque 1. – Le développement "distingué" est voisin, et cependant différent, d'un développement utilisé couramment dans l'étude des approximations non homogènes (voir par exemple [1], [2], [5], [7]).

Remarque 2. – Un point $\beta \equiv u\alpha \equiv \sum_1^\infty \{b_n\ \theta_n\}$ $(u \in Z)$ est caractérisé par le fait que : ou les b_n sont nuls à partir d'un certain rang $(u \geqslant 0)$, ou les b_n sont alternativement égaux à a_n (n pair) et à 0 (n impair) à partir d'un certain rang $(u < 0)$.

2° Relations linéaires. – Soient r_n , r_{n-1} , $b_n \in N$, avec

$$r_n < q_{n+1} \qquad \text{et} \qquad r_n = r_{n-1} + b_n\, q_n \ .$$

Alors, pour tout $u \in N$, $u < q_n$:

si n est pair, $\quad \varphi^+(u\alpha\ ,\ r_n) = \varphi^+(u\alpha\ ,\ r_{n-1}) + b_n\ \varphi^+(u\alpha\ ,\ q_n)$,

si n est impair, $\quad \varphi^-(u\alpha\ ,\ r_n) = \varphi^-(u\alpha\ ,\ r_{n-1}) + b_n\ \varphi^-(u\alpha\ ,\ q_n)$.

3° Pour démontrer le théorème III, on utilise le développement distingué de β : $\beta = \sum b_n\ \theta_n$, l'hypothèse $\beta \notin Z\alpha$ se traduisant par des conditions imposées à la suite (b_n) (voir remarque 2 ci-dessus).

Pour établir que la suite $n \to \varphi(\beta\ ,\ n)$ est non bornée, on démontre que : si $x \in N$, $x < q_n$,

$$|\varphi(\beta\ ,\ x) - \varphi(r_n\ \alpha\ ,\ x)| < 1 \qquad (r_n = r_n(\beta))\ ,$$

et on est ramené à prouver que $(\varphi(r_n\ \alpha\ ,\ x))$ $(x < q_n)$ est non borné.

Pour cela, il convient de séparer la démonstration en divers cas particuliers. Dans chaque cas, on établit l'existence d'une constante $c > 0$ telle que : s'il existe $t \in R$ et $y \in N$ tels que, pour tout $n \in N$ assez grand,

$$\varphi^{+}(r_n \alpha , y) < t \qquad [\text{resp. } \varphi^{-}(r_n \alpha , y) > t] ,$$

alors, il existe $x \in N$ tel que, pour tout $n \in N$ assez grand,

$$\varphi^{+}(r_n \alpha , x) \leqslant t - c \qquad [\text{resp. } \varphi^{-}(r_n \alpha , x) > t + c] .$$

Les cas particuliers, dont il est question plus haut, sont au nombre de 4 . Le premier, par exemple, est le cas où :

"Il existe une infinité d'indices n tels que $1 \leqslant b_n \leqslant a_n - 2$ ".

Dans ce cas, on prend :

$$x = y + b_s q_s$$

pour un indice s impair [resp. pair] convenable, et on minore [resp. on majore]

$$\varphi^{-}(r_n \alpha , x) - t \qquad [\text{resp. } \varphi^{+}(r_n \alpha , x) - t]$$

pour tout $n \in N$ assez grand. (Le calcul reposant sur l'expression de

$$\varphi^{-}(r_s \alpha , x) - \varphi^{-}(r_{s-1} \alpha , y)$$

qui s'obtient sans difficulté grâce à une relation linéaire et à la relation de réciprocité.)

5. Le problème restant.

ERDÖS [3] a conjecturé que la réciproque du théorème I est vraie. Il n'en est rien comme le prouve le théorème II.

Que sait-on de la suite des restes d'un intervalle (β , γ) ?

- Si $\gamma - \beta \in Z\alpha$, la suite des restes est bornée.
- Du théorème III, on déduit facilement : Si β ou $\gamma \in Z\alpha$, et si $\gamma - \beta \notin Z\alpha$, la suite des restes est non bornée.
- Le seul cas où on ne sait pas conclure est le cas : $\beta \notin Z\alpha$, $\gamma \notin Z\alpha$, $\gamma - \beta \notin Z\alpha$.

On peut conjecturer que, dans ce cas, la suite des restes est non bornée, ce qui établirait :

"La suite des restes d'un intervalle (β , γ) est bornée si, et seulement si, $\gamma - \beta \in Z\alpha$ ".

BIBLIOGRAPHIE

[1] CASSELS (J. W. S.). - Über $\underline{\lim}\ x|\theta x + \alpha - y|$, Math. Annalen, t. 127, 1954, p. 288-304.

[2] DESCOMBES (R.). - Sur la répartition des sommets d'une ligne polygonale régulière non fermée, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 73, 1956, p. 284-355.

[3] ERDÖS (P.). - Problems and results on diophantine approximations, Compos. Math., Groningen, t. 16, 1964, p. 52-65.

[4] HECKE (E.). - Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod 1, Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, t. 1, 1922, p. 54-76.

[5] LESCA (J.). - Répartition des points d'abscisse $n\alpha$ sur une circonférence de longueur unité (Thèse de troisième cycle, Grenoble, 1962).

[6] OSTROWSKI (A.). - Zur theorie der linearen Diophantischen Approximationen, Jahresb. Deutschen Math. Verein., t. 39, 1930, p. 34-46.

[7] SOS (V. T.). - On the theory of Diophantine approximations, II, Acta Math. Acad. Scient. Hungar., t. 9, 1958, p. 229-241.