

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

CLAUDE DESCHAMPS

## Équations différentielles $p$ -adiques

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 7, n° 2 (1965-1966),  
exp. n° 19, p. 1-10

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1965-1966\\_\\_7\\_2\\_A7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1965-1966__7_2_A7_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1965-1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES p-ADIQUES

par Claude DESCHAMPS

Préliminaires. - Notre but est d'étendre, aux fonctions p-adiques d'une variable p-adique, les propriétés différentielles des fonctions réelles (resp. complexes) d'une variable réelle (resp. complexe).

Comme corps, nous utiliserons :

$\mathbb{Q}_p$  : complété p-adique du corps  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels, pour la valeur absolue p-adique normalisée :

$$|p| = \frac{1}{p} .$$

$K$  : une extension complète quelconque de  $\mathbb{Q}_p$  munie de la valeur absolue prolongeant celle de  $\mathbb{Q}_p$ . En particulier,  $K$  pourra être le complété de la clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$  :  $\widehat{\Omega}_p$ .

Nous noterons  $v(x) = -\log_p |x|$ , la valuation d'un élément  $x$  de  $K$  ( $v(0) = +\infty$ ).

Étant donnée une fonction p-adique d'une variable p-adique définie sur un ouvert  $U$ , la notion de dérivée se définit comme pour une fonction de variable réelle, et les propriétés formelles des dérivées : dérivée d'une somme, d'un produit, d'une fonction de fonction, sont valables sans modification. Nous chercherons à résoudre une équation différentielle  $y' = F(x, y)$ , et nous distinguerons deux cas suivant la nature du corps p-adique.

1. Les fonctions p-adiques sont définies sur un sous-ensemble de  $\mathbb{Q}_p$ , et sont à valeurs dans  $\mathbb{Q}_p$ .

Nous nous proposons de démontrer le théorème d'existence [1].

Si  $F(x, y)$  est une fonction de deux variables p-adiques continue pour  $|x - x_0| \leq a$ ,  $|y - y_0| \leq b$ , il existe une fonction p-adique  $f$ , continue, dérivable pour  $|x - x_0| \leq a$ , telle que  $y_0 = f(x_0)$ , et telle que l'on ait identiquement pour ces valeurs de  $x$ ,

$$f'(x) = F[x, f(x)] .$$

Par translation sur les variables  $x$  et  $y$ , nous pouvons supposer que

$$x_0 = y_0 = 0 .$$

Par homothétie sur la variable  $x$ , nous pouvons supposer que  $a = 1$ .

$B_{\mathbb{Q}_p}(0, b)$  désignant la boule de  $\mathbb{Q}_p$  de centre  $0$ , de rayon  $b$ ,  $F$  est une application continue du produit  $Z_p \times B_{\mathbb{Q}_p}(0, b)$  dans  $\mathbb{Q}_p$ .

Tout entier  $p$ -adique est caractérisé par son développement de Hensel :

$$x = a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n + \dots$$

avec  $a_i$  entier,  $0 \leq a_i \leq p - 1$ , et nous poserons :

$$x_n = a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n .$$

En particulier :

$$|x - x_n| \leq \frac{1}{p^{n+1}} .$$

Construction de la fonction  $f$  . - Nous allons définir une suite d'applications continues  $f_n$ , de  $Z_p$  dans  $B_{\mathbb{Q}_p}(0, b)$ .

Les boules  $|x| \leq 1$  et  $|y| \leq b$  étant compactes,  $F$  étant continue sur le produit de ces boules, il existe  $M$  tel que, pour tout  $|x| \leq 1$ ,  $|y| \leq b$ , on ait :

$$|F(x, y)| \leq M .$$

Soit  $k$  un entier, tel que  $\frac{M}{p^{k+1}} \leq b$ . Nous poserons :

$$f_0(x) = f_1(x) = \dots = f_{k-1}(x) = 0 ,$$

$$f_k(x) = (x - x_k) F[x_k, 0] ,$$

pour  $n > k$ ,

$$f_n(x) = f_{n-1}(x_n) + (x - x_n) F[x_n, f_{n-1}(x_n)] .$$

Montrons que  $f_n$  applique  $Z_p$  dans  $B_{\mathbb{Q}_p}(0, b)$  (ce qui justifiera cette définition par récurrence),

$$x \in Z_p \quad |f_k(x)| \leq \frac{M}{p^{k+1}} \leq b .$$

Par récurrence, il est évident que :

$$|f_{n-1}(x)| \leq b \implies |f_n(x)| \leq b \quad \text{pour tout } x \in Z_p .$$

Soit alors  $n > k$ , quelconque :

$$f_n(x_{n+1}) = f_{n-1}(x_n) + (x_{n+1} - x_n) F[x_n, f_{n-1}(x_n)] ,$$

d'où

$$(1) \quad f_{n+1}(x) - f_n(x) = (x - x_{n+1}) [F(x_{n+1}, f_n(x_{n+1})) - F(x_n, f_{n-1}(x_n))] .$$

En particulier :

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{M}{p^{n+2}} ,$$

et quel que soit  $m > n$  :

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{M}{p^{n+2}} .$$

La suite  $f_n$  est une suite de Cauchy qui converge normalement.

Soit  $f$  sa limite :  $f$  est une application de  $Z_p$  dans  $B_{Q_p}(0, b)$ , et de plus, pour tout  $n > k$ , et pour tout  $x \in Z_p$  :

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{M}{p^{n+2}} .$$

Montrons maintenant que  $f$  satisfait aux conditions imposées :

$f(0) = 0$  est évident.

$f$  est continue comme limite uniforme d'une suite d'applications continues.

Il reste à démontrer que  $f$  est dérivable en  $x$  et que :

$$f'(x) = F[x, f(x)] .$$

Pour cela, nous allons démontrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } |x' - x| \leq \eta \implies \left| \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - F[x, f(x)] \right| \leq \varepsilon .$$

Etant donné  $\varepsilon$ , il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\alpha_1 - \alpha_2| \leq \delta \\ |\beta_1 - \beta_2| \leq \delta \end{array} \right\} \implies |F(\alpha_1, \beta_1) - F(\alpha_2, \beta_2)| \leq \varepsilon$$

(uniforme continuité de  $F$  sur le compact  $Z_p \times B_{Q_p}(0, b)$ ). Il existe un entier

$N$  ( $N \geq k$ ) tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{p^{N+1}} \leq \delta , \\ \frac{M}{p^{N+1}} \leq \delta . \end{array} \right.$$

Soit  $n \geq N$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} |x - x_n| \leq \frac{1}{p^{n+1}} \leq \delta \\ |f(x) - f_{n-1}(x_n)| \leq \frac{M}{p^{n+1}} \leq \delta \end{array} \right\} \Rightarrow |F[x, f(x)] - F[x_n, f_{n-1}(x_n)]| \leq \varepsilon .$$

Prenons  $\eta = \frac{1}{p^{n_0+1}}$ . Soit  $x'$  tel que  $|x' - x| \leq \eta$ .

$$|x' - x| = \frac{1}{p^{n_0+1}}$$

(la valuation est discrète) avec  $n_0 \geq N$ . En particulier,  $x'_{n_0} = x_{n_0}$  :

$$f_{n_0}(x') = f_{n_0-1}(x_{n_0}) + (x' - x_{n_0}) F[x_{n_0}, f_{n_0-1}(x_{n_0})] ,$$

$$f_{n_0}(x') - f_{n_0}(x) = (x' - x) F[x_{n_0}, f_{n_0-1}(x_{n_0})] .$$

Comme  $n_0 \geq N$  :

$$\left| \frac{f_{n_0}(x') - f_{n_0}(x)}{x' - x} - F[x, f(x)] \right| \leq \varepsilon .$$

Pour un entier  $n$  quelconque, supérieur à  $n_0$ , et pour un élément  $z$ , quelconque, de  $Z_p$ , d'après la relation (1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} |z_{n+1} - z_n| \leq \frac{1}{p^{n+1}} \leq \delta \\ |f_n(z_{n+1}) - f_{n-1}(z_n)| \leq \frac{M}{p^{n+1}} \leq \delta \end{array} \right\} \Rightarrow |f_{n+1}(z) - f_n(z)| \leq \frac{\varepsilon}{p^{n+2}} \leq \varepsilon |x' - x| .$$

En particulier :

$$\left| \frac{f_{n+1}(x') - f_{n+1}(x)}{x' - x} - \frac{f_n(x') - f_n(x)}{x' - x} \right| \leq \varepsilon .$$

Par récurrence, on en déduit :

$$\forall m \geq n_0 \quad \left| \frac{f_m(x') - f_m(x)}{x' - x} - F[x, f(x)] \right| \leq \varepsilon ,$$

ce qui démontre le résultat par passage à la limite.

Remarque. - Le théorème des accroissements finis n'est plus vrai dans  $\mathbb{Q}_p$ . En particulier, il n'y a pas unicité de la solution, et on peut envisager des fonc-

tions continues, dérivables, à dérivée identiquement nulle, non constantes.

Soit par exemple l'application  $f$  de  $Z_p$  dans  $Z_p$  :

$$x = a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n + \dots ,$$

$$f(x) = a_0 + a_1 p^2 + \dots + a_n p^{2n} + \dots .$$

Si  $|x' - x| = \frac{1}{p^n}$ ,  $|f(x') - f(x)| = \frac{1}{p^{2n}}$ . Elle est donc continue, non constante au voisinage de  $x$ . Et pourtant elle est dérivable en  $x$ , et sa dérivée est nulle :

$$\left| \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \right| = \frac{1}{p^n} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad x' \rightarrow x .$$

2. Les fonctions p-adiques sont définies sur un sous-ensemble de  $K$ , et sont à valeurs dans  $K$ .

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME. - Si  $F(x, y)$  est analytique au point  $(x_0, y_0)$ , l'équation différentielle  $y' = F(x, y)$  admet une solution unique  $f$  :

- analytique au point  $x_0$ ,
- telle que  $y_0 = f(x_0)$ .

Par translation sur les variables, nous pouvons supposer que  $x_0 = y_0 = 0$ .

Il existe donc  $r$  et  $R$  tels que :

$$F(x, y) = a_{00} + a_{10} x + a_{01} y + \dots + a_{nm} x^n y^m + \dots \quad \text{pour} \quad \begin{cases} |x| < r \\ |y| < R \end{cases} .$$

S'il existe une solution analytique de l'équation différentielle  $y' = F(x, y)$ , telle que  $y_0 = f(x_0)$ , cette solution est la somme d'une série :

$$y = \sum_{n \geq 1} \alpha_n x^n ,$$

et les coefficients  $\alpha_n$  sont déterminés par les relations de récurrence (obtenues en substituant  $y$  dans  $y' = F(x, y)$ ) :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_{00} , \\ 2\alpha_2 &= a_{10} + a_{01} \alpha_1 , \\ \dots & \\ (n+1)\alpha_{n+1} &= \sum_{0 \leq i+k \leq n} a_{ik} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k} , \end{aligned}$$

avec  $i_1, i_2, \dots, i_k$  des entiers tels que  $i_1 + \dots + i_k = n - i$ . Ces relations déterminent une série formelle unique, à coefficients dans  $K$ , solution de  $y' = F(x, y)$ .

Montrons que son rayon de convergence n'est pas nul.

PROPRIÉTÉ. - Si  $a_1, a_2, \dots, a_k$  sont des entiers tels que  $a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq n$ , alors :

$$|n!| \leq |a_1! a_2! \dots a_k!| .$$

Il suffit de le démontrer pour  $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$ .

Remarquons que :

$$\binom{n+k}{n} = \frac{(n+k) \dots (k+1)}{n!}$$

est un entier ; donc, quel que soit l'entier  $k$  positif ou nul :

$$|(k+1) \dots (k+n)| \leq |n!| ,$$

$$n! = \underbrace{1.2.3 \dots a_1}_{a_1!} \underbrace{(a_1+1) \dots (a_1+a_2)}_{\leq |a_2!|} \dots \underbrace{(a_1+a_2+\dots+a_{k-1}+1) \dots n}_{\leq |a_k!|} ,$$

$$|n!| \leq |a_1! a_2! \dots a_k!| .$$

Majorons  $|\alpha_n|$  ; soient  $x$  et  $y$  tels que

$$\begin{cases} |x| = \frac{1}{p^\alpha} < r , \\ |y| = \frac{1}{p^\beta} < R . \end{cases}$$

Nous pouvons supposer  $\alpha$  et  $\beta$  positifs ou nuls. La série double converge, et il existe  $\underline{C}$  (que l'on peut supposer supérieur ou égal à 1) tel que :

$$|a_{nm}| \leq \underline{C} p^{n\alpha} p^{m\beta} .$$

Soit  $\gamma = \sup(\alpha, \beta)$ ,

$$|a_{nm}| \leq \underline{C} p^{(n+m)\gamma} .$$

$$|\alpha_1| \leq C :$$

$$|\alpha_2| \leq \frac{\sup[C p^\gamma, C^2 p^\gamma]}{|2|} \leq \frac{C^2 p^\gamma}{|2|} .$$

Supposons que, pour  $1 \leq i \leq n$ ,  $|\alpha_i| \leq \frac{C^i p^{(i-1)\gamma}}{|i!|}$ ,

$$|(n+1)\alpha_{n+1}| \leq \sup [C p^{(i+k)\gamma} \frac{C^{i_1} p^{(i_1-1)\gamma}}{|i_1!|} \dots \frac{C^{i_k} p^{(i_k-1)\gamma}}{|i_k!|}] \leq \frac{C^{n+1} p^{n\gamma}}{|n!|},$$

en utilisant le fait que  $i_1 + i_2 + \dots + i_k = n - i$ .

En particulier, pour tout  $n$  :

$$|\alpha_n| \leq \frac{C^n p^{(n-1)\gamma}}{|n!|}.$$

Si  $R_0$  désigne le rayon de convergence de la série exponentielle, pour

$$|x| < R_0 \frac{1}{C p^\gamma},$$

la série  $y$  converge.

Remarque. - Si l'on prend  $F(x, y) = y - 1$ , l'équation différentielle  $y' = y - 1$  admet à l'origine une solution analytique unique (nulle à l'origine). Nous pouvons prendre  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ , alors  $C = 1$ , et nous retrouvons exactement le rayon  $R_0$  de l'exponentielle.

Maintenant, nous allons placer un pôle au point  $x_0$ , et nous allons démontrer le théorème suivant :

THEOREME. - Si  $F(x, y)$  est analytique au point  $(x_0, y_0)$  et telle que  $F(x_0, y_0) = 0$ ,  $F'_y(x_0, y_0) = \alpha$ , l'équation différentielle :

$$(x - x_0)y' = F(x, y)$$

- admet une solution unique  $f$ , analytique au point  $x_0$ , telle que  $y_0 = f(x_0)$  si  $\alpha \notin \mathbb{Z}_p$ .

- admet soit une infinité de solutions, soit aucune (analytique au point  $x_0$ , telle que  $y_0 = f(x_0)$ ) si  $\alpha$  est entier naturel.

Si  $\alpha \in \mathbb{Z}_p$  et n'est pas entier naturel, on ne peut rien dire.

Par translation sur les variables  $x$  et  $y$ , nous pouvons supposer que

$$x_0 = y_0 = 0.$$

Nous écrivons l'équation différentielle sous la forme :

$$xy' - \alpha y = a_{10} x + a_{20} x^2 + a_{11} xy + \dots + a_{nm} x^n y^m + \dots \quad \text{pour } \begin{cases} |x| < r \\ |y| < R \end{cases}.$$



S'il existe une fonction analytique à l'origine, telle que  $f(0) = 0$ , cette fonction est la somme d'une série entière dont les coefficients sont déterminés par le système :

$$y = \sum_{n \geq 1} \alpha_n x^n ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 [1 - \alpha] = a_{10} \\ \alpha_2 [2 - \alpha] = a_{20} + a_{11} \alpha_1 + a_{02} \alpha_1^2 \\ \dots \\ \alpha_n [n - \alpha] = \sum_{i_1 + \dots + i_k = n-1} a_{i_k} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k} , \end{array} \right.$$

avec  $i_1, \dots, i_k$  entiers inférieurs ou égaux à  $n - 1$ .

1° Si  $\alpha \notin \mathbb{Z}_p$ , quel que soit  $n$ ,  $n - \alpha \neq 0$ , ce système détermine les coefficients  $\alpha_n$  de manière unique.

Reste à démontrer que la série obtenue  $\sum_{n \geq 1} \alpha_n x^n$  a un rayon de convergence non nul.

$$\text{Soit } d = \inf_n |n - \alpha| ,$$

$$\alpha \notin \mathbb{Z}_p \implies d > 0 .$$

Soit alors :

$$0 < r_1 < r ,$$

$$0 < R_1 < R .$$

La série double converge, et il existe donc  $M$  tel que

$$|a_{nm}| \leq \frac{M}{r_1^n R_1^m} \quad \text{quels que soient } m \text{ et } n .$$

Considérons l'équation en  $y$  :

$$y \cdot d = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r_1}\right) \left(1 - \frac{y}{R_1}\right)} - M - \frac{M}{R_1} y .$$

Cette équation du second degré admet la solution :

$$y = dR_1^2 \frac{[1 - \sqrt{1 - 4 \frac{Mx}{r_1 - x} \left[\frac{dR_1 + M}{d^2 R_1^2}\right]}}{2[dR_1 + M]}$$

qui s'annule pour  $x = 0$  et qui est analytique, son rayon de convergence étant supérieur ou égal à

$$\frac{r_1}{1 + 4M \left[ \frac{d^2 r_1^2 + M}{d^2 R_1^2} \right]} .$$

Si nous cherchons directement les coefficients  $\beta_n$  de cette solution, nous obtenons le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} d \cdot \beta_1 = \frac{M}{r_1} \\ d \cdot \beta_2 = \frac{M}{r_1^2} + \frac{M}{r_1 R_1} \beta_1 + \frac{M}{R_1^2} \beta_1^2 \\ \dots \\ d \cdot \beta_n = \sum_{i_1, \dots, i_k} \frac{M}{r_1^{i_1} R_1^{i_k}} \beta_{i_1} \dots \beta_{i_k}, \quad i_1, \dots, i_k \text{ entiers } \leq n-1 . \end{array} \right.$$

Par récurrence, il est évident que  $|\alpha_n| \leq \beta_n$ , ce qui démontre que la série  $\sum \alpha_n x^n$  a un rayon de convergence non nul.

2°  $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ .

(a)  $\alpha$  est entier naturel :  $\alpha = k$ .

Le premier membre de la  $k$ -ième équation est nul.

Si le second ne l'est pas, il n'y a pas de solution.

Si le second est nul,  $\alpha_k$  est arbitraire.

Dans ce dernier cas, une démonstration analogue à celle du premier théorème du § 2 (majoration directe des  $\alpha_n$ ) permet encore de démontrer la convergence de la série  $\sum \alpha_n x^n$ .

(b)  $\alpha$  n'est pas entier naturel : on ne peut rien dire, la convergence de la série  $\sum \alpha_n x^n$  dépend de  $\alpha$  et de la nature de la série du deuxième membre de l'équation différentielle.

1er exemple.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 + p + p^2 + \dots + p^n + \dots \\ F(x, y) = \frac{x}{1-x} + \alpha y \quad \text{au point } x_0 = y_0 = 0, \end{array} \right.$$

$$xy' - \alpha y = x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad \text{pour } |x| < 1 .$$

Les coefficients  $\alpha_n$  sont déterminés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1[1 - \alpha] = 1 \\ \dots \\ \alpha_n[n - \alpha] = 1 \\ \dots \end{array} \right. .$$

$$|n - \alpha| \geq \frac{1}{p^n}, \text{ donc } |\alpha_n| \leq p^n .$$

Le rayon de la série  $\sum \alpha_n x^n$  est supérieur ou égal à  $\frac{1}{p}$ .

2e exemple. - Soit un entier  $i_1$  quelconque, et soit la suite  $i_n$  définie par récurrence :

$$i_n = [1 + p^{i_1} + \dots + p^{i_{n-1}}]^2 \quad i_n \in \mathbb{N} .$$

Posons :

$$\alpha = 1 + p^{i_1} + \dots + p^{i_n} + \dots \quad \alpha \in \mathbb{Z}_p ,$$

$$F(x, y) = \frac{x}{1-x} + \alpha y \quad \text{au point } x_0 = y_0 = 0 ,$$

$$xy' - \alpha y = x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad \text{pour } |x| < 1 .$$

Les coefficients  $\alpha_n$  sont déterminés par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1[1 - \alpha] = 1 \\ \dots \\ \alpha_n[n - \alpha] = 1 \\ \dots \end{array} \right. .$$

Pour les entiers  $n = 1 + p^{i_1} + \dots + p^{i_h}$ , on a  $|n - \alpha| = p^{-i_{h+1}}$  et

$$|\alpha_n| = p^{i_{h+1}} \Rightarrow |\alpha_n|^{1/n} = p^{(i_{h+1})/(1+p^{i_1}+\dots+p^{i_h})} = p^{1+p^{i_1}+\dots+p^{i_h}} = p .$$

La série  $\sum \alpha_n x^n$  a un rayon de convergence nul.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] DIEUDONNÉ (Jean). - Sur les fonctions continues  $p$ -adiques, Bull. Sc. math., 2e série, t. 68, 1944, 1re partie, p. 79-95.