

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MARTHE GRANDET-HUGOT

Étude de certaines suites $\{\lambda\alpha^n\}$ dans les adèles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 7, n° 1 (1965-1966),
exp. n° 7, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1965-1966__7_1_A6_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1965-1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE DE CERTAINES SUITES $\{\lambda\alpha^n\}$ DANS LES ADÈLES

par Marthe GRANDET-HUGOT

Nous allons donner ici une généralisation aux adèles de certains théorèmes sur la répartition mod 1 des suites $\{\lambda\alpha^n\}$ dans le corps des réels. Nous généraliserons, en particulier, les résultats suivants dus à C. PISOT [6], [7].

1° L'ensemble des nombres réels $\alpha > 1$ et λ , tels que (mod 1) la suite $\varphi_n = \lambda\alpha^n$ ait un nombre fini de points d'accumulation, est dénombrable. Si de plus α est algébrique, alors $\alpha \in S$, ensemble des nombres de Pisot, et $\lambda \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

2° Si α est un nombre réel supérieur à 1, et si $\lambda > 0$, $\alpha \in S$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (a) La suite $\varphi_n = \lambda\alpha^n$ a (mod 1) un nombre fini de points d'accumulation.
 (b) La convergence de la répartition vers ses valeurs limites est $o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$, k étant le nombre de valeurs limites irrationnelles.

1. Rappels et notations.

Considérons l'ensemble P des valuations de \mathbb{Q} , o désignant la valuation ordinaire, et p la valuation p -adique avec $|p|_p = p^{-1}$, \mathbb{Q}_p désignant la complétion de \mathbb{Q} pour la valuation p -adique et Ω_p sa clôture algébrique.

Soit I un sous-ensemble fini de P , posons :

$$I^+ = I \cup \{0\} \quad \text{et} \quad I^- = I - \{0\} \quad \text{si} \quad 0 \in I.$$

Si V_p désigne l'anneau des adèles de \mathbb{Q} , V_I désignera l'anneau des I -adèles de \mathbb{Q} , c'est-à-dire :

$$V_I = \{x \in V_p \text{ tels que } x_p = 0 \text{ si } p \notin I\};$$

V_I est alors isomorphe algébriquement et topologiquement à $\prod_{p \in I} \mathbb{Q}_p$, et contient un sous-corps isomorphe à \mathbb{Q} , soit $\mathbb{Q}e_I$, où e_I est l'élément unité de V_I . Enfin nous désignerons par $Z[I]$ le sous-anneau de \mathbb{Q} ainsi défini :

$$Z[I] = \{x \in \mathbb{Q}, |x|_p \leq 1 \text{ pour } p \notin I^+\}.$$

Décomposition d'Artin [1], [2]. - Soit a un nombre réel ; nous appellerons domaine fondamental de V_I , noté $F_a(I)$, le sous-ensemble de V_I ainsi défini :

$$F_a(I) = \{x \in V_I, |x|_p \leq 1 \text{ pour } p \in I^- \text{ et } 0 \leq x_0 < a + 1 \text{ si } 0 \in I\} .$$

On obtient alors le théorème suivant [1], [2] :

Soit $x \in V_I$; il existe une décomposition unique

$$x = e_I E(x) + \varepsilon(x) ,$$

où

$$E(x) \in Z[I] \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) \in F_a(I) ,$$

de plus, si $0 \notin I$, on a l'inégalité

$$a \leq -E(x) < a + 1 .$$

2. Remarque sur la décomposition d'Artin des suites $\{\lambda\alpha^n\}$.

Soit α un élément de V_I tel que $|\alpha|_p > 1$ pour tout $p \in I$, et soit λ un élément inversible de V_I .

Si a est un nombre réel quelconque, la décomposition d'Artin de $\lambda\alpha^n$ peut s'écrire, en prenant $F_a(I)$ comme domaine fondamental,

$$\lambda\alpha^n = e_I u_n + \varepsilon(\lambda\alpha^n) .$$

Alors : deux suites $\{\lambda\alpha^n\}$ et $\{\lambda'\alpha'^n\}$ distinctes ne peuvent pas engendrer la même suite $\{u_n\}$.

En effet si

$$\begin{aligned} \lambda\alpha^n &= u_n + \varepsilon(\lambda\alpha^n) , \\ \lambda'\alpha'^n &= u_n + \varepsilon(\lambda'\alpha'^n) . \end{aligned}$$

Alors si $|\alpha|_p > |\alpha'|_p$,

$$\alpha_p^n \left[\lambda_p - \lambda'_p \left(\frac{\alpha'}{\alpha} \right)^n \right] = \varepsilon_p(\lambda\alpha^n) - \varepsilon_p(\lambda'\alpha'^n) ,$$

et le deuxième membre reste borné, tandis que le premier membre augmente indéfiniment avec n ; on en déduit que

$$|\alpha|_p = |\alpha'|_p \quad \text{et} \quad |\lambda|_p = |\lambda'|_p \quad \text{pour tout } p \in I ,$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_p - \lambda_p' \left(\frac{\alpha_p'}{\alpha_p} \right)^n = 0 ,$$

ce qui entraîne $\lambda_p \alpha_p^n = \lambda_p' \alpha_p'^n$ à partir d'un certain rang, d'où $\alpha_p = \alpha_p'$ et $\lambda_p = \lambda_p'$ pour $p \in I$, donc $\alpha = \alpha'$ et $\lambda = \lambda'$.

3. Ensembles $S_I^{p'}(a)$.

Soit $p' \in P$; si $p' \notin I$, nous poserons $I' = I \cup \{p'\}$. $V_{I'}$ est alors un sous-anneau de V_I , et, étant donné un élément $x \in V_{I'}$, nous pouvons considérer sa décomposition d'Artin dans $V_{I'}$; alors :

Pour tout $x \in V_{I'}$, il existe une décomposition unique :

$$x = e_{I'} E(x) + \varepsilon(x) ,$$

où

$$E(x) \in \underline{\mathbb{Z}[I']} \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) \in F_a(I') ,$$

c'est-à-dire que si $p' \notin I$,

$$\varepsilon_{p'}(x) = - E(x) .$$

DEFINITION. - Nous appellerons $S_I^{p'}(a)$ l'ensemble des éléments $\alpha \in V_I$ tels que $|\alpha|_p > 1$ pour tout $p \in I$, et qu'il existe un élément inversible $\lambda \in V_I$ tel que, étant donné $p' \in P$, si l'on considère la décomposition d'Artin de $\lambda \alpha^n$ dans $V_{I'}$,

$$\lambda \alpha^n = e_{I'} u_n + \varepsilon(\lambda \alpha^n) ,$$

avec $F_a(I')$ comme domaine fondamental, on ait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_{p'}(\lambda \alpha^n) = 0 .$$

Les éléments algébriques de cet ensemble sont alors les ensembles $S_I^{p'}$ définis par F. BERTRANDIAS [2] :

$S_I^{p'}$ est l'ensemble des éléments algébriques θ de V_I tels que $|\theta|_p > 1$ pour tout $p \in I$ et pour lesquels il existe un polynôme $A \in \underline{\mathbb{Z}[X]}$ ayant les propriétés suivantes :

- θ est racine de A dans V_I ,
- Les racines de A dans Ω_p , (distinctes de θ_p , si $p' \in I$) appartiennent au disque $|X|_p < 1$,

- Les racines de A dans Ω_p (distinctes de θ_p si $p \in I$) appartiennent au disque $|X|_p \leq 1$ pour tout $p \in P$.

Nous allons alors démontrer le théorème suivant :

THÉOREME 1. - L'ensemble $S_I^{p'}(a)$ est dénombrable, et l'ensemble des λ associés aux $\alpha \in S_I^{p'}(a)$ est également dénombrable.

Démonstration. - De la décomposition d'Artin de $\lambda\alpha^n$ dans V_I ,

$$\lambda\alpha^n = e_I u_n + \varepsilon(\lambda\alpha^n),$$

on déduit

$$(1) \quad e_I \left(u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n} \right) = -\frac{u_{n+2}}{u_n} \varepsilon(\lambda\alpha^n) + 2 \frac{u_{n+1}}{u_n} \varepsilon(\lambda\alpha^{n+1}) - \varepsilon(\lambda\alpha^{n+r}) + \frac{\varepsilon^2(\lambda\alpha^{n+1}) - \varepsilon(\lambda\alpha^n) \varepsilon(\lambda\alpha^{n+r})}{u_n},$$

d'où l'on tire les majorations suivantes, en posant

$$|\alpha|_p = p^t \quad \text{pour } p \in I^-$$

$$|\lambda|_p = p^r.$$

(a) Pour $p \in I^-$ et $p \neq p'$. - A partir d'un certain rang :

$$|u_n|_p = p^{r+nt} p^r;$$

on a donc, à partir d'un certain rang,

$$(2) \quad \left| u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n} \right|_p \leq p^{2t} p^r.$$

(b) Pour $p = o \in I$, $p \neq p'$. - Alors $|\varepsilon_o(\lambda\alpha^n)| \leq \max(|a|, |a+1|) = A$, et quand n augmente indéfiniment, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ reste borné, il existe une constante M telle que

$$(3) \quad \left| u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n} \right| \leq M$$

à partir d'un certain rang.

(c) Pour $p' \in I^-$. - Alors, étant donné ε , à partir d'un certain rang :

$$|\varepsilon(\lambda\alpha^n)|_{p'} < \varepsilon ,$$

d'où :

$$(4) \quad \left| u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n} \right|_{p'} < \varepsilon p^{2t_{p'}} .$$

(d) Pour $p' = 0 \in I$. - Alors, nécessairement $|a| < 1$, et, étant donné ε , à partir d'un certain rang :

$$|\varepsilon_0(\lambda\alpha^n)| < \varepsilon ,$$

d'où :

$$(5) \quad \left| u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n} \right| < \varepsilon M ,$$

où M est une constante.

Nous allons montrer que si u_0, \dots, u_{n+1} sont donnés, ces inégalités, jointes à celles qui définissent le domaine fondamental et, éventuellement (si $p' \notin I$), à celles qui expriment que $\varepsilon_{p'}(\lambda\alpha^n) \rightarrow 0$, déterminent u_{n+2} de manière unique. Pour cela, supposons qu'il existe deux éléments u_{n+2} et u'_{n+2} de $\mathbb{Z}[I']$ vérifiant ces inégalités, et étudions la différence $u_{n+2} - u'_{n+2}$ dans les différents cas possibles.

1° $p' \in I$.

- Si $p' \neq 0$ et $0 \in I$, de (3) on tire :

$$(3') \quad |u_{n+2} - u'_{n+2}| \leq 2M ,$$

et, pour $p \neq p'$ et $p \neq 0$, de (2) on tire :

$$(2') \quad |u_{n+2} - u'_{n+2}|_p \leq p^{2t_p} ;$$

enfin, de (4) on tire :

$$(4') \quad |u_{n+2} - u'_{n+2}|_{p'} \leq \varepsilon p^{2t_{p'}} \quad \text{à partir d'un certain rang .}$$

- Si $0 \notin I$, d'après la définition de $F_a(I')$ on aura :

$$(6) \quad |u_{n+2} - u'_{n+2}| < 1 .$$

-Si $p' = 0$, alors de (5) on tire :

$$(5') \quad |u_{n+2} - u'_{n+2}| < 2\varepsilon M .$$

Dans tous les cas, on a donc :

$$\prod_{p \in I^+} |u_{n+2} - u'_{n+2}|_p < C\varepsilon ,$$

où C est une constante, donc si ε est choisi assez petit, à partir d'un certain rang on a :

$$\prod_{p \in I^+} |u_{n+2} - u'_{n+2}|_p < 1 ,$$

ce qui, compte tenu du fait qu'alors $u_n \in \mathbb{Z}[I]$, entraîne que $u_{n+2} = u'_{n+2}$.

2° $p' \notin I$.

Pour $p \in I$ et pour la valuation ordinaire si $p' \neq 0$, on utilise les mêmes inégalités que ci-dessus et l'on a, à partir d'un certain rang :

$$|u_{n+2}|_{p'} < \varepsilon ,$$

d'où

$$|u_{n+2} - u'_{n+2}|_{p'} < 2\varepsilon ,$$

donc

$$\prod_{p \in I^+} |u_{n+2} - u'_{n+2}|_{p'} < C\varepsilon ,$$

ce qui permet de conclure comme plus haut.

L'ensemble des suites $\{u_n\}$ est donc dénombrable, et puisqu'à chaque suite correspond au plus un élément α et un élément λ de V_I , l'ensemble des α et l'ensemble des λ sont des ensembles dénombrables.

4. Cas où $\varepsilon_{p'}(\lambda\alpha^n)$ a un nombre fini de points d'accumulation.

On peut, sans restreindre la généralité du problème, prendre $a = -\frac{1}{2}$.

$p' \neq 0$. - Considérons une suite d'éléments $\varphi_n \in V_{I'}$ (ici $\varphi_n = \lambda\alpha^n$), et supposons que, pour $p' \in I'$, $\varepsilon_{p'}(\varphi_n)$ ait un nombre fini de points d'accumulation dans $\mathbb{Z}_{p'}$.

Soient r_i ($i = 1, \dots, h$) les points d'accumulation rationnels, et ω_j ($j = 1, \dots, h$) les autres. Si $(\varphi_n)_{p'}$ désigne la composante de φ_n dans $\mathbb{Q}_{p'}$:

On peut trouver un élément $d \in \mathbb{Z}[P']$ tel que, dans la décomposition d'Artin de $d\varphi_n$, le seul point d'accumulation rationnel de $\varepsilon_{p'}(d\varphi_n)$ soit 0.

Dans la suite, nous supposons avoir ramené toutes les valeurs limites rationnelles à 0.

Etant donné le système des formes linéaires :

$$\Lambda_j = x\omega_j - y_j \quad j = 1, \dots, h,$$

on sait (cf. [5], chapitre II) qu'on peut trouver un entier H aussi grand que l'on veut tel que :

$$|x\omega_j - y_j|_{p'} < \frac{1}{H^{I+1/h}} \quad j = 1, \dots, h,$$

avec

$$H = \max_{j=1, \dots, h} (|x|, |y_j|),$$

x et les y_j étant des entiers rationnels premiers entre eux dans leur ensemble.

On a alors nécessairement $|x|_{p'} = 1$, car si $|x|_{p'} < 1$, on aurait, d'après l'inégalité ultramétrique, $|y_j|_{p'} < 1$ pour tout j , et x et les y_j ne seraient pas premiers entre eux dans leur ensemble.

On a donc :

$$(x\varphi_n)_{p'} = x E(\varphi_n) + x\omega_j + \varepsilon_n \quad j = 0, 1, \dots, h,$$

où éventuellement l'on pose $w_0 = 0$, et $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Donc, si

$$\eta_j = x\omega_j - y_j,$$

$$(x\varphi_n)_{p'} = x E(\varphi_n) + y_j + \eta_j + x\varepsilon_n$$

et

$$|\eta_j|_{p'} < \frac{1}{H^{I+1/h}} \quad j = 1, \dots, h.$$

On peut donc poser :

$$x\varphi_n = v_n e_{I'} + \eta_n \quad \text{où } v_n = xu_n + y_j,$$

où $v_n \in Z[I']$, et où η_n vérifie les inégalités suivantes, pour n assez grand :

$$|\eta_n|_{p'} < \frac{2}{H^{I+1/h}}$$

$$|\eta_n|_p \leq 1 \quad \text{pour } p \neq p'$$

$$|\eta_n|_0 < H + \frac{1}{2}.$$

On peut alors écrire des inégalités analogues à celles du § 3, c'est-à-dire :

- Si $p' \in I$:

$$\left| v_{n+2} - \frac{v_{n+1}^2}{v_n} \right|_{p'} \leq \frac{K}{H^{1+1/h}} ,$$

où K est une constante.

- Si $p' \notin I$, alors :

$$|v_n|_{p'} \leq \frac{K}{H^{1+1/h}}$$

à partir d'un certain rang.

Pour la valeur absolue ordinaire, on obtient les inégalités suivantes :

- Si $0 \in I$:

$$\left| v_{n+2} - \frac{v_{n+1}^2}{v_n} \right| < CH .$$

- Si $0 \notin I$:

$$|v_n| \leq CH ,$$

C étant une constante.

On en déduit de la même manière qu'au § 3 que l'ensemble des suites $\{v_n\}$ est dénombrable, ainsi que l'ensemble des α et des λ .

$p' = 0$. - La démonstration est presque identique à celle qui a été faite dans le cas réel [7].

THÉORÈME 2. - Les éléments $\alpha \in V_I$, tels qu'il existe un élément inversible λ de V_I , pour lequel, en considérant la décomposition d'Artin de $\lambda \alpha^n$ dans V_I , $\epsilon_p(\lambda \alpha^n)$ ait un nombre fini de points d'accumulation dans \mathbb{Z}_p , forment un ensemble dénombrable. L'ensemble des λ associés est également dénombrable.

On démontre alors, de manière analogue à ce qui a été fait dans le cas réel [7], que les éléments algébriques de cet ensemble sont les éléments de $S_I^{p'}$ [2].

Cas particulier où $p' = 0$. - Dans ce cas, grâce à un théorème d'A. DECOMPS [3], [4], on démontre le théorème suivant :

THÉORÈME 3. - Si $\alpha \in V_I$ et $|\alpha|_p > 1$, pour tout $p \in V_I$, et si les conditions suivantes sont vérifiées :

(a) Il existe un élément inversible λ de V_I tel que, si l'on considère la décomposition d'Artin de $\lambda \alpha^n$ dans V_I :

$$\lambda \alpha^n = u_n e_I + \varepsilon(\lambda \alpha^n) ,$$

$\varepsilon_0(\lambda \alpha^n)$ admet un nombre fini de points d'accumulation.

(b) La convergence de $\varepsilon_0(\lambda \alpha^n)$ vers ses points d'accumulation est $O\left(\frac{1}{n^{h+1}}\right)$, h étant le nombre de points d'accumulation irrationnels.

Alors $\alpha \in S_I^0$, et λ est un élément de l'anneau $Q_I[\alpha]$.

Il suffit de montrer que α est algébrique ; on utilise alors l'un ou l'autre des théorèmes suivants [3], [4].

THÉORÈME A ($0 \notin I$) . - Soit $\alpha \in V_I$, $|\alpha|_p = p^{t_p}$, $t_p > 0$, $\forall p \in I$. S'il existe $\lambda \in V_I$, $|\lambda|_p = p^{b_p}$, $b_p > 0$, $\forall p \in I$, tel que dans la décomposition d'Artin :

$$\lambda \alpha^n = e_I u_n + \varepsilon(\lambda \alpha^n) ,$$

on ait :

$$|u_n| < \frac{1}{q^2 e(1 + \log m)} \quad \forall n \geq 0 ,$$

où

$$q = \prod_{p \in I} p^{t_p} \quad \text{et} \quad m = \prod_{p \in I} p^{b_p} ,$$

alors α et λ sont algébriques.

THÉORÈME B ($0 \in I$) . - Soit $\alpha \in V_I$, $|\alpha|_p = p^{t_p}$, $t_p > 0$, $\forall p \in I^-$ et $|\alpha_0| > 1$; s'il existe $\lambda \in V_I$, $|\lambda|_p = p^{b_p}$, $b_p > 0$, $\forall p \in I^-$ et $|\lambda_0| > 1$ tel que dans la décomposition d'Artin :

$$\lambda \alpha^n = e_I u_n + \varepsilon(\lambda \alpha^n) ,$$

on ait :

$$|\varepsilon_0(\lambda \alpha^n)| < \frac{1}{2q^2 \alpha_0(\alpha_0 + 1) e(1 + \log m)} \quad \forall n \geq 0 ,$$

où l'on a posé :

$$q = \prod_{p \in I^-} p^{t_p} , \quad m = \prod_{p \in I^-} |\lambda|_p ,$$

alors α et λ sont algébriques.

La démonstration se fait alors comme dans le cas réel [7].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARTIN (Emil). - Algebraic numbers and algebraic functions, New York and Princeton University, 1950-1951 (multi-graphié).
 - [2] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math. France, Mémoire 4, 1965 (Thèse Sc. math. Paris, 1965).
 - [3] DECOMPS-GUILLOUX (Annette). - Ensembles d'éléments algébriques dans les adèles, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 261, 1965, p. 1929-1931.
 - [4] DECOMPS-GUILLOUX (Annette). - Répartition modulo 1 de λ^n dans les adèles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 7e année, 1965/66, n° 5.
 - [5] LUTZ (Elisabeth). - Sur les approximations diophantiennes linéaires p-adiques. - Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind., 1224 ; Publ. Inst. math. Univ. Strasbourg, 12).
 - [6] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Serie 2, t. 7, 1938, p. 205-248.
 - [7] PISOT (Charles). - Répartition (mod 1) des puissances successives des nombres réels, Comment. Math. Helvet., t. 19, 1946, p. 153-160.
-