

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MICHEL MENDÈS FRANCE

## Fonctions de Walsh et fonctions pseudo-aléatoires

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 7, n° 1 (1965-1966),  
exp. n° 4, p. 1-9

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1965-1966\\_\\_7\\_1\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1965-1966__7_1_A3_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1965-1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres »  
implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>).  
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction  
pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS DE WALSH ET FONCTIONS PSEUDO-ALÉATOIRES

par Michel MENDES FRANCE

1. Fonctions pseudo-aléatoires.

Nous dirons, avec J. BASS [1], qu'une fonction  $f$  à valeurs complexes, définie sur les entiers  $\mathbb{Z}$ , est pseudo-aléatoire si la fonction de corrélation

$$\gamma(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{f}(k) f(k+p)$$

- (a) est définie pour tout entier  $p$ ,
- (b)  $\gamma(0) > 0$ ,
- (c)  $\lim_{p \rightarrow \infty} \gamma(p) = 0$ .

Il est facile de construire des fonctions pseudo-aléatoires au sens de BASS. Des exemples en sont donnés dans [1] et [5]. Par ailleurs, on peut montrer que presque toutes les applications de l'ensemble des entiers  $\mathbb{Z}$  sur la circonférence  $|z|=1$  du plan complexe sont pseudo-aléatoires.

Dans [2], J.-P. BERTRANDIAS a élargi la classe des fonctions pseudo-aléatoires en remplaçant la condition (c) par la condition plus faible :

$$(c') \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{q=1}^p |\gamma(q)|^2 = 0 .$$

Dans tout ce qui suit, on entendra par "fonction pseudo-aléatoire", une fonction qui satisfait aux trois conditions (a), (b), et (c').

Notre but est de montrer comment, grâce à l'ensemble de Walsh, on peut construire une fonction pseudo-aléatoire qui ne vérifie pas la condition (c). Au paragraphe 8, on applique certains des résultats obtenus à l'équirépartition modulo 1.

Remarque. - On sait qu'une fonction de corrélation admet la représentation :

$$\gamma(p) = \int_0^1 \exp(2i\pi px) d\alpha(x) , \quad p \in \mathbb{Z} ,$$

où  $d\alpha$  désigne une mesure positive bornée. La condition (c') implique que la mesure soit continue. Si, de plus, la condition (c) n'a pas lieu, on sait qu'alors la mesure  $d\alpha$  est non absolument continue.

## 2. L'ensemble de Walsh et la fonction de Walsh.

Dans tout l'exposé,  $g$  désigne un nombre entier supérieur ou égal à 2. Soit  $G = (\mathbb{Z}/g\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$  le groupe abélien des suites d'entiers modulo  $g$ , muni de la topologie discrète. Soit  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$  un élément du groupe  $G$ . Il est clair que l'application

$$\varepsilon \rightarrow c_n(\varepsilon) = \exp \frac{2i\pi}{g} \varepsilon_n$$

est un caractère du groupe. Il s'ensuit que si  $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_s$  est une suite finie d'entiers positifs, l'application  $c_{p_1, p_2, \dots, p_s} = c_{p_1} c_{p_2} \dots c_{p_s}$  est un caractère. On montre que réciproquement, tous les caractères  $c$  de  $(\mathbb{Z}/g\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$  sont de cette forme (produit fini de  $c_p$ ) [3].

Désignons par  $\tilde{\alpha}$  le résidu modulo  $g$  du nombre réel  $\alpha$ . A chaque élément  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$  de  $(\mathbb{Z}/g\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ , on peut faire correspondre un nombre  $x$  de l'intervalle  $]0, 1[$  par l'application

$$\varepsilon \rightarrow x = A\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\varepsilon}_n}{g^n}.$$

En dehors d'un ensemble dénombrable de points  $\frac{a}{g^p}$  ( $a, p$  entiers) de l'intervalle unité, l'application  $A$  est inversible. Si  $x$  est de la forme  $\frac{a}{g^p}$ , c'est-à-dire si  $x$  admet deux représentations  $g$ -adiques, on conviendra de ne conserver que celle qui contient un nombre infini de décimales  $g$ -adiques non nulles. Dans ces conditions, l'application  $A$  est une bijection de  $(\mathbb{Z}/g\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$  sur  $]0, 1[$ .

On appelle suite de Rademacher (dans la base  $g$ ) associée au nombre  $x \in ]0, 1[$ , la suite infinie

$$c_1(A^{-1}x), c_2(A^{-1}x), \dots, c_n(A^{-1}x), \dots$$

On appelle ensemble de Walsh (dans la base  $g$ ), l'ensemble des applications

$$x \rightarrow c(A^{-1}x),$$

où  $c$  est un caractère du groupe  $(\mathbb{Z}/g\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ .

Pour simplifier l'écriture, on pose  $r_n(x) = c_n(A^{-1}x)$  et  $\omega(x) = c(A^{-1}x)$ . On prolonge les fonctions  $\omega$  par périodicité de sorte que  $\omega(x+1) = \omega(x)$ .

On peut munir l'ensemble de Walsh d'un ordre de la façon suivante : on pose  $\omega_0 = 1$ , et si  $n$  est un entier positif,  $\omega_n = r_{p_1} r_{p_2} \dots r_{p_s}$  où

$$gn = g^{p_1} + g^{p_2} + \dots + g^{p_s} \quad (p_j \in \mathbb{N}, 1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_s, p_j < p_{j+g-1}) .$$

Par définition, la fonction de Walsh associée au point  $x$  est la valeur, au point  $x$ , de l'ensemble ordonné de Walsh, l'ordre étant celui précédemment défini. En d'autres termes, la fonction de Walsh associée au point  $x$  est l'application

$$n \rightarrow \omega_n(x) .$$

On prolonge la fonction aux entiers négatifs en posant  $\omega_n = \omega_{|n|}$  .

THÉOREME. - Soit  $x$  un nombre réel arbitraire (d'après les conventions faites,  $x$  admet toujours un développement  $g$ -adique infini). La fonction de Walsh associée à  $x$  est une fonction pseudo-aléatoire qui ne vérifie pas la condition (c).

COROLLAIRE. - Soit  $q(n)$  la somme des chiffres de l'entier  $n$  écrit dans le système à base  $g$ . La fonction

$$n \rightarrow \exp\left\{\frac{2i\pi}{g} q(|n|)\right\}$$

est pseudo-aléatoire, et elle ne vérifie pas la condition (c).

Le corollaire est dû à MAHLER [4]. La démonstration du théorème généralise sa méthode.

### 3. Démonstration du théorème.

Dans le système à base  $g$ , tout nombre entier non négatif  $n$  s'écrit sous la forme suivante :

$$n = \sum_{p=0}^{\infty} e_p(n) g^p ,$$

où  $e_p(n)$  prend ses valeurs parmi les nombres  $0, 1, \dots, g-1$ . (La série précédente ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls.) Soit  $s = (s_n)_{n \geq 0}$  une suite infinie d'entiers rationnels. On pose

$$q_s(n) = \sum_{p=0}^{\infty} e_p(n) s_p$$

et

$$f_s(n) = \exp\left(\frac{2i\pi}{g} q_s(|n|)\right) , \quad n \in \mathbb{Z} .$$

LEMME 1. - Soit  $s = (s_n)_{n \geq 0}$  une suite infinie d'entiers non tous nuls modulo  $g$  à partir d'un certain rang. On définit le nombre réel :

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{s}_n}{g^{n+1}} .$$

L'identité suivante

$$f_s(n) = \omega_n(x) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

a alors lieu.

La démonstration est évidente ([6], p. 249).

Le théorème peut alors s'énoncer sous la forme suivante :

Si la suite  $s = (s_n)_{n \geq 0}$  contient une infinité de nombres entiers non divisibles par  $g$ , alors la fonction  $f_s$  est pseudo-aléatoire, et elle ne satisfait pas à la condition (c).

#### 4. Existence de la corrélation.

On définit l'opérateur  $T$  de translation

$$T\{(s_n)_{n \geq 0}\} = \{s_{n+1}\}_{n \geq 0} ,$$

et ses puissances successives  $T^2, T^3, \dots$ .

LEMME 2. - Quelle que soit la suite d'entiers  $s = (s_n)_{n \geq 0}$ , la corrélation

$$\gamma_s(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \bar{f}_s(\ell) f_s(\ell + k) , \quad k \in \mathbb{Z}$$

existe. De plus, si  $a$  désigne un des  $g$  entiers  $0, 1, \dots, g-1$ , la corrélation vérifie la formule de récurrence

$$\begin{cases} \gamma_s(1) = (1 - \frac{1}{g}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{g^k} \exp\{\frac{2i\pi}{g}(s_k - s_{k-1} - \dots - s_0)\} \\ \gamma_s(gk + a) = [\frac{g-a}{g} \gamma_{Ts}(k) + \frac{a}{g} \gamma_{Ts}(k+1)] \exp(\frac{2i\pi}{g} a s_0) . \end{cases}$$

La méthode employée pour démontrer ce lemme est calquée sur celle qu'emploie MAHLER dans [4]. On se sert essentiellement de la relation de récurrence

$$f_s(gn + a) = f_{Ts}(n) \exp \frac{2i\pi}{g} a s_0 , \quad a = 0, 1, \dots, g-1 .$$

#### 5. La condition (c) n'est pas satisfaite.

Etablissons le lemme suivant :

LEMME 3. - Si la suite  $s$  contient une infinité de termes non divisibles par  $g$ , alors  $\gamma_s(\ell)$  ne peut pas tendre vers 0 lorsque  $\ell$  croît indéfiniment.

Cela se démontre facilement grâce au lemme 2. En effet :

$$(1) \quad \begin{aligned} \gamma_s(g^v) &= \gamma_{T^v_s}(1) \\ &= \left(1 - \frac{1}{g}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{g^k} \exp\left\{\frac{2i\pi}{g}(s_{k+v} - s_{k+v-1} - \dots - s_v)\right\} . \end{aligned}$$

Si  $g$  est un entier supérieur ou égal à 3, les inégalités suivantes ont lieu :

$$|\gamma_s(g^v)| \geq \left(1 - \frac{1}{g}\right) \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{g^k}\right) = \frac{g-2}{g} > 0 .$$

Cela démontre le lemme.

Si au contraire  $g$  est égal à 2, on emploie l'argument suivant :

Supposons que l'on ait :

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \gamma_s(2^v) = 0 .$$

Cela implique que, dans la formule (1), le deuxième et le troisième terme de la somme du second membre aient un même signe pour tout entier  $v$  suffisamment grand. Il existe donc un nombre  $v_0$  tel que

$$\exp i\pi(s_{v+1} - s_v) = \exp i\pi(s_{v+2} - s_{v+1} - s_v) , \quad v = v_0 + 1, v_0 + 2, \dots .$$

Donc  $s_{v+2}$  doit être entier pair pour tout  $v > v_0$ . Cela contredit l'hypothèse du lemme 3. Il est donc impossible que  $\gamma_s(2^v)$  tende vers 0.

6. La condition (c') est satisfaite.

Par une technique très voisine de celle employée pour établir le lemme 2, on démontre le lemme suivant :

LEMME 4. - Quelle que soit la suite  $s$  d'entiers, la corrélation

$$\Gamma_s(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \gamma_s(\ell) \gamma_s(\ell + k) , \quad k \in \mathbb{Z}$$

existe. De plus, les deux égalités suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma_s(gk) &= \frac{2g^2+1}{3g^2} \Gamma_{Ts}(k) + \frac{g^2-1}{6g^2} [\Gamma_{Ts}(k-1) + \Gamma_{Ts}(k+1)] \\ \Gamma_s(gk+1) &= \left[ \frac{2(g^2-1)}{3g^2} \Gamma_{Ts}(k) + \frac{(g-1)(g-2)}{6g^2} \Gamma_{Ts}(k-1) + \frac{(g+1)(g+2)}{6g^2} \Gamma_{Ts}(k+1) \right] \exp \frac{2i\pi}{g} s_0 \end{aligned} \right.$$

ont lieu.

En prenant  $k = 0$  dans le lemme précédent, et en désignant par  $M(s)$  la matrice

$$\frac{1}{6g^2} \begin{pmatrix} 4g^2 + 2 & g^2 - 1 & g^2 - 1 \\ 4(g^2 - 1) \exp \frac{2i\pi}{g} s_0 & (g+1)(g+2) \exp \frac{2i\pi}{g} s_0 & (g-1)(g-2) \exp \frac{2i\pi}{g} s_0 \\ 4(g^2 - 1) \exp \frac{-2i\pi}{g} s_0 & (g-1)(g-2) \exp \frac{-2i\pi}{g} s_0 & (g+1)(g+2) \exp \frac{-2i\pi}{g} s_0 \end{pmatrix}$$

on obtient le résultat suivant :

COROLLAIRE. - La corrélation  $\Gamma_s$  vérifie l'égalité suivante :

$$\begin{pmatrix} \Gamma_s(0) \\ \Gamma_s(1) \\ \Gamma_s(-1) \end{pmatrix} = M(s) \begin{pmatrix} \Gamma_{Ts}(0) \\ \Gamma_{Ts}(1) \\ \Gamma_{Ts}(-1) \end{pmatrix} .$$

Grâce à ce résultat, nous allons montrer que  $\Gamma_s(0) = 0$ , et cela établira complètement le théorème.

Désignons par  $\|\dots\|$  la norme définie sur l'espace vectoriel des matrices d'ordre 3 par

$$\|(a_{ij})\| = \sup_i \sum_j |a_{ij}| .$$

Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices, on vérifie alors sans peine que l'on a :

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| .$$

Par ailleurs, l'égalité

$$\begin{pmatrix} \Gamma_s(0) \\ \Gamma_s(1) \\ \Gamma_s(-1) \end{pmatrix} = M(s) M(Ts) \dots M(T^{\nu-1} s) \begin{pmatrix} \Gamma_{T^\nu s}(0) \\ \Gamma_{T^\nu s}(1) \\ \Gamma_{T^\nu s}(-1) \end{pmatrix} ,$$

(conséquence immédiate du corollaire), et l'inégalité

$$0 \leq |\Gamma_{T^v_s}(1)| \leq \Gamma_{T^v_s}(0) \leq 1$$

(conséquence de l'inégalité de Schwarz), montrent que les deux inégalités suivantes

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \Gamma_s(0) \leq \prod_{m=0}^{\infty} \|M(T^{2m}_s) M(T^{2m+1}_s)\| \\ 0 \leq \Gamma_s(0) \leq \prod_{m=0}^{\infty} \|M(T^{2m+1}_s) M(T^{2m+2}_s)\| \end{array} \right.$$

sont vraies.

Montrons que, si  $s$  contient une infinité de termes non nuls modulo  $g$ , l'un au moins des produits infinis précédents est nul.

LEMME 5. - Soient  $A = (\alpha_{ij} \varepsilon_i)$  et  $B = (\beta_{ij} \varepsilon'_i)$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) deux matrices telles que

$$(i) \quad \alpha_{ij} \geq 0, \quad \beta_{ij} \geq 0, \quad \sum_j \alpha_{ij} = \sum_j \beta_{ij} = 1$$

$$(ii) \quad |\varepsilon_i| = 1, \quad |\varepsilon'_i| = 1, \quad \text{et } \varepsilon'_i \neq \varepsilon'_j \text{ pour } i \neq j.$$

Alors,  $\|AB\| < 1$ .

La démonstration est évidente.

Dans le lemme 5, on pose  $A = M(T^v_s)$  et  $B = M(T^{v+1}_s)$ . Les conditions (i) et (ii) sont satisfaites pourvu que  $s_{v+1}$  ne soit pas divisible par  $g$ . Ainsi, chaque fois que  $v$  est telle que  $s_{v+1} \not\equiv 0 \pmod{g}$ , l'inégalité

$$R_v = \|M(T^v_s) M(T^{v+1}_s)\| < 1$$

a lieu. Le nombre  $R_v$  ne dépend que de  $s_v$  et  $s_{v+1}$  modulo  $g$ . Ainsi lorsque  $v$  parcourt les entiers positifs,  $R_v$  prend au plus  $g^2$  valeurs. Il existe donc un nombre  $\delta < 1$  tel que

$$s_{v+1} \not\equiv 0 \pmod{g} \implies R_v \leq \delta.$$

Si alors, par hypothèse, on admet qu'il existe une infinité de  $s_{v+1} \not\equiv 0 \pmod{g}$ , on voit que l'un des deux produits infinis des formules (2) est nul. Ainsi se trouve démontré le théorème.



### 7. Démonstration du corollaire du théorème.

Dans le théorème, on choisit  $x = 1/g - 1$ .

### 8. Application à l'équirépartition modulo 1.

Au paragraphe 3, on a supposé que  $s$  était une suite infinie d'entiers rationnels. On peut généraliser les résultats en remplaçant la suite  $s$  par une suite infinie  $\sigma$  de nombres réels. On pose comme précédemment

$$q_{\sigma}(n) = \sum_{p=0}^{\infty} e_p(n) \sigma_p$$

et  $\varphi_{\sigma} = \exp 2i\pi q_{\sigma}$ . On montre alors que, si  $\sigma = \alpha s$  ( $\alpha$  irrationnel,  $s \in \{(0), (1)\}^{\mathbb{N}}$ ),  $\varphi_{\sigma}$  est pseudo-aléatoire si, et seulement si,  $s$  contient une infinité de termes non nuls. Sachant qu'une fonction pseudo-aléatoire a une moyenne nulle ([1], [2]), on en déduit que, pour  $\alpha$  irrationnel, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \exp 2i\pi k \alpha q_{\sigma}(\ell) = 0 \quad k = 1, 2, \dots$$

Le critère de Weyl montre ainsi que la suite  $u_n = \alpha q_{\sigma}(n)$  est équirépartie modulo 1. En particulier, on obtient le résultat suivant :

COROLLAIRE. - Soit  $q(n)$  la somme des chiffres de l'entier  $n$  écrit dans le système à base  $g$ . La suite  $u_n = \alpha q(n)$  est équirépartie modulo 1 si, et seulement si,  $\alpha$  est irrationnel.

Cela fournit un exemple de plus de suites  $(u_n) = (\alpha \lambda(n))$  ( $\lambda(n) \in \mathbb{Z}$ ) qui sont équiréparties modulo 1 si, et seulement si,  $\alpha$  est irrationnel. (On sait que cette propriété a lieu par exemple si  $\lambda(n) = h(n)$  ou bien  $\lambda(n) = h(p_n)$ ,  $h$  étant un polynôme réel non constant à coefficients entiers et  $p_n$  désignant le  $n$ -ième nombre premier.)

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BASS (Jean). - Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires, Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959, p. 1-64.
- [2] BERTRANDIAS (Jean-Paul). - Suites pseudo-aléatoires et critère d'équirépartition modulo 1, Comp. Math., t. 16, 1964, p. 23-28.
- [3] FINE (N. J.). - On the Walsh functions, Trans. Amer. math. Soc., t. 65, 1949, p. 372-414.

- [4] MAHLER (Kurt). - The spectrum of an array and its applications of the study of the translation properties of a simple class of mathematical functions, II : On the translation properties of a simple class of mathematical functions, J. of Math. and Phys., t. 6, 1927, p. 158-163.
  - [5] MENDES FRANCE (Michel). - Nombres normaux et fonctions pseudo-aléatoires, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 13, 1963, n° 2, p. 91-104.
  - [6] VILENKIN (N. Ja.). - Supplement to "Theory of orthogonal series", Amer. math. Soc. Transl., t. 17, 1961, p. 219-250.
  - [7] WIENER (Norbert). - The spectrum of an array and its applications of the study of the translation properties of a simple class of mathematical functions, I : The spectrum of an array, J. of Math. and Phys., t. 6, 1927, p. 145-157.
-