François Dress

Familles fermées de séries formelles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 7, n° 1 (1965-1966), exp. n° 3, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1965-1966__7_1_A2_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des Nombres)
7e année, 1965/66, n° 3

6 décembre 1965

FAMILLES FERMÉES DE SÉRIES FORMELLES

par François DRESS

1. Préliminaires.

Dans cet exposé, nous ne traiterons que de séries entières formelles, et les deux qualificatifs seront constamment omis.

Définition. - Nous désignons par Φ_q la famille des séries $F = F(z)$ qui sont quotients de deux séries à coefficients entiers : $F = \frac{U}{V}$. Nous supposons de plus que l'entier non nul $V(0) = q$ est fixe.

Il est bien évident que Φ_q et Φ_{-q} sont confondues.

La propriété très simple que nous allons maintenant énoncer constitue le support des raisonnements par récurrence que nous effectuerons.

LEMME A. - *Si F, appartenant à Φ_q, est à coefficients non tous entiers ($F \notin \Phi_1$), on peut toujours l'écrire sous la forme*

$$F(z) = P^*(z) + \frac{z^\lambda}{G(z)} ,$$

où P^* est un polynôme à coefficients entiers, λ un entier $\geqslant 0$, et $G \in \Phi_{q'}$, avec $|q'| < |q|$ ($q' \neq 0$).

Si $F \notin \Phi_1$, il existe alors λ fini ($\lambda \geqslant 0$) tel que

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{\lambda-1} z^{\lambda-1} + a_\lambda z^\lambda + \ldots ,$$

avec a_j entier pour $0 \leqslant j \leqslant \lambda - 1$, et a_λ non entier. Il suffit alors d'effectuer le produit $FV = U$ pour constater que qa_λ est entier. On peut alors poser

$$a_\lambda = a'_\lambda + \frac{q'}{q} , \qquad \text{avec } a'_\lambda \text{ entier et } |q'| < |q| \quad (q' \neq 0) .$$

Si nous mettons en évidence le polynôme à coefficients entiers

$$P^*(z) = a_0 + \ldots + a_{\lambda-1} z^{\lambda-1} + a'_\lambda z^\lambda ,$$

nous aurons

$$F(z) = \frac{U(z)}{V(z)} = P^*(z) + z^\lambda\left(\frac{q'}{q} + \ldots\right) .$$

Or $U(z) - P^*(z)\, V(z) = z^{\lambda}\, W(z)$, où W est une série à coefficients entiers, de sorte que nous pouvons écrire

$$F(z) = P^*(z) + z^{\lambda} \frac{W(z)}{V(z)} ,$$

avec $|W(0)| = |q'| < |q|$, ce qui démontre le lemme, car l'inverse $\frac{V}{W} = G \in \Phi_{q'}$.

Nous terminerons ces préliminaires en définissant une métrique dans l'algèbre des séries formelles. Pour cela, nous utiliserons la norme classique :

Si $F(z) = a_s\, z^s + a_{s+1}\, z^{s+1} + \dots$, avec $a_s \neq 0$,

$$\|F\| = h^{-s} \qquad (h > 1) .$$

Ainsi, la convergence d'une suite $\{F^{(n)}\}$ de séries vers la série F s'exprime simplement par le fait que tous les coefficients $a_k^{(n)}$ tendent vers les a_k et leurs sont égaux à partir d'un certain rang :

$$\|F^{(n)} - F\| < h^{-s} \quad \text{entraîne} \quad a_k^{(n)} = a_k \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant s .$$

2. Résultat sur les familles fermées.

PROPOSITION 1. - Chaque famille Φ_q est fermée.

Nous démontrerons ce résultat par récurrence sur la valeur absolue de l'entier q.

Remarquons au préalable que, si $F^{(n)} \in \Phi_q$, ses coefficients sont de la forme $a_k^{(n)} = \frac{\text{entier}}{q^{k+1}}$, de sorte que si $F^{(n)}$ tend vers une limite F, les coefficients de F sont de la forme $a_k = \frac{\text{entier}}{q^{k+1}}$ également.

Nous écarterons le cas trivial où F serait à coefficients tous entiers. On aurait en effet $F \in \Phi_1$ (car on peut toujours poser $V \equiv 1$ et alors $F = \frac{F}{1}$), ce qui entraîne $F \in \Phi_q$ quel que soit l'entier q.

Ce cas étant donc écarté, il existe alors un rang fini λ tel que

$$F(z) = P^*(z) + (a_{\lambda} - a'_{\lambda})\, z^{\lambda} + a_{\lambda+1}\, z^{\lambda+1} + \dots ,$$

où $P^*(z) = a_0 + \dots + a'_{\lambda}\, z^{\lambda}$ est un polynôme à coefficients entiers et où, a_{λ} étant non entier, a'_{λ} est défini comme au paragraphe 1 par la condition $|a_{\lambda} - a'_{\lambda}| = |\frac{q'}{q}| < 1$. En définissant le rang n_0 par

$$n \geqslant n_0 \quad \text{entraîne} \quad a_k^{(n)} = a_k \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant \lambda ,$$

on appliquera, pour $n \geqslant n_0$, le lemme A aux $F^{(n)}$:

$$F^{(n)}(z) = P^*(z) + \frac{z^\lambda}{G^{(n)}(z)} \quad ,$$

où $G^{(n)}(z) \in \Phi_{q'}$, avec $|q'| < |q|$.

La propriété $a_k^{(n)} = a_k$ pour $0 \leqslant k \leqslant \lambda$ donne la double certitude, et que $P^*(z)$ est fixe, et que q' est fixe. Or on a :

$$F^{(n)} \to F \iff G^{(n)} \to G \quad ,$$

ainsi que

$$F \in \Phi_q \iff G \in \Phi_q \quad .$$

Si donc chaque famille $\Phi_{q'}$, où $|q'| < |q|$, est fermée, nous avons démontré que Φ_q est aussi fermée. Il ne reste plus qu'à montrer que Φ_1 est fermée, ce qui est évident (si une série à coefficients entiers possède une limite, cette limite est une série à coefficients entiers, et Φ_1 est précisément la famille des séries à coefficients entiers).

Remarque. - Il est possible, bien sûr, que la limite F appartienne à une famille $\Phi_{q'}$, q' divisant q , sans qu'aucune des $F^{(n)}$ n'appartienne à $\Phi_{q'}$.

3. Expressions primitives.

Nous allons maintenant étudier comment toutes les expressions - comme quotients de deux séries à coefficients entiers - d'une série F appartenant à Φ_q peuvent se déduire de l'une d'entre elles, supposée primitive.

Définition. - Soit $\frac{U}{V}$ une expression de la série F , appartenant à une famille Φ_q . Nous dirons que $\frac{U}{V}$ est une expression primitive de F si U et V sont premières entre elles dans l'anneau des séries à coefficients entiers.

En d'autres termes, il n'existe pas trois séries à coefficients entiers, D , U_1 , V_1 , D n'étant pas une unité de cet anneau (c'est-à-dire que $|D(0)| \geqslant 2$), telles que

$$U = U_1 D \qquad \text{et} \qquad V = V_1 D \quad .$$

PROPOSITION 2. - *Si F appartient à une certaine famille Φ_q , et si $\frac{U}{V} = F$ est une expression primitive, toutes les autres expressions $F = \frac{U'}{V'}$ seront données par*

$$U' = UD \qquad \text{et} \qquad V' = VD \quad ,$$

où D est une série quelconque à coefficients entiers.

Nous démontrerons cette proposition, comme la précédente, par récurrence sur la valeur absolue de l'entier q .

Soit donc $F = \frac{U}{V}$ appartenant à Φ_q ($|q| \neq 1$). D'après le lemme A, nous avons

$$F = P^* + \frac{z^\lambda}{G} \quad , \qquad \text{avec } G \in \Phi_{q'} \ , \quad |q'| < |q| \quad .$$

L'expression $F = \frac{U}{V}$ étant supposée primitive, $G = \frac{V}{W}$ l'est aussi. En effet, si on avait

$$V = V_1 \ D \qquad \text{et} \qquad W = W_1 \ D \qquad (\text{avec } |D(0)| \geqslant 2 \ ) \ ,$$

on en déduirait

$$U = (P^*V_1 + z^\lambda \ W_1)D \qquad \text{et} \qquad V = V_1 \ D \quad .$$

Supposons donc cette proposition vraie pour toutes les familles $\Phi_{q'}$, $|q'| < |q|$, et donnons-nous une autre expression $\frac{U'}{V'}$ de la série F . $U' - P^*V'$ est à coefficients entiers et contient z^λ en facteur :

$$U' - P^*V' = z^\lambda \ W' \quad .$$

Nous en déduisons une seconde expression $\frac{V'}{W'}$ de la série G . Mais $G \in \Phi_{q'}$, famille pour laquelle la proposition a été supposée vraie, ce qui assure de l'existence de la série D telle que

$$V' = VD \qquad \text{et} \qquad W' = WD \quad ,$$

d'où nous déduisons immédiatement le résultat cherché :

$$U' = UD \qquad \text{et} \qquad V' = VD \quad .$$

Il faut enfin montrer que la proposition est vraie pour Φ_1 . Cela résulte des deux remarques suivantes :

(a) Si $F = \frac{U}{V}$ appartient à Φ_1 , et si $|V(0)| \geqslant 2$, $\frac{U}{V}$ n'est pas une expression primitive de F . En effet, en posant $D = V$, on aura $U = FD$ et $V = 1D$;

(b) Si $F = \frac{U}{V}$ appartient à Φ_1 , et si $|V(0)| = 1$, $\frac{U}{V}$ est une expression primitive de F . Cela est évident, d'après la définition d'une expression primitive.

Soient alors $\frac{U}{V}$ une expression primitive de F appartenant à Φ_1 , et $\frac{U'}{V'}$ une autre expression. Comme $|V(0)| = 1$, $D = \frac{V'}{V}$ est une série à coefficients entiers, ce qui permet d'écrire

$$V' = VD \ , \qquad \text{donc} \qquad U' = UD \quad .$$

Remarque 1. - La caractérisation des expressions primitives que nous avons donnée, lorsque F appartient à Φ_1, pour démontrer la proposition 2, est en fait générale. Utilisant cette proposition maintenant établie, nous pouvons énoncer que, si F appartient à Φ_q sans appartenir à aucune $\Phi_{q'}$, q' divisant q, les expressions primitives $\frac{U}{V}$ de F sont caractérisées par $|V(0)| = q$. En d'autres termes, cela signifie qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{U}{V}$ soit une expression primitive de la série F qu'elle représente, est que F n'appartienne à aucune autre famille $\Phi_{q'}$, q' divisant q. Cela se montre en constatant que :

(a) Si F appartient à Φ_q et si $F = \frac{U}{V}$ est une expression primitive vérifiant $|V(0)| = q$, F ne peut pas appartenir à une autre $\Phi_{q'}$, $|q'| < |q|$, car on aurait alors $F = \frac{U'}{V'}$ avec $|V'(0)| = q'$, ce qui est incompatible avec $V' = VD$ et $D(0)$ entier.

(b) Si $F = \frac{U}{V}$ appartient à Φ_q et n'appartient à aucune autre $\Phi_{q'}$, $|q'| < |q|$, alors $|V(0)| = q$ entraîne la primitivité de $\frac{U}{V}$ d'après la définition même d'une expression primitive.

Remarque 2. - Nous avons parlé, au début de ce paragraphe, des unités de l'anneau des séries à coefficients entiers. Si nous considérons l'anneau un peu plus général des séries de Laurent à développement limité à gauche :

$$F(z) = \sum_m^\infty a_k z^k , \qquad m \text{ pouvant être négatif} ,$$

et à coefficients entiers, si nous définissons la valeur absolue d'une série comme la valeur absolue du terme de plus bas degré : $|F| = |a_m|$, alors le lemme A démontre que cet anneau est euclidien. Il peut en effet s'écrire

$$U(z) = P^*(z)\, V(z) + z^\lambda\, W(z) \quad ,$$

avec

$$|U(z)| = |q| \qquad \text{et} \qquad |z^\lambda\, W(z)| = |q'| < |q|$$

(P^* étant considéré ici comme un pseudo-polynôme).

Dans cette optique, dire que $\frac{U}{V}$ est une expression primitive de F signifie simplement que U et V sont des éléments premiers entre eux, et la proposition 2 est une conséquence immédiate de la factorisation unique.

4. Fractions rationnelles.

Afin d'éviter toute confusion dans ce qui suit, les notations astérisquées (U^* , V^* , ...) seront réservées exclusivement aux polynômes (à coefficients entiers).

LEMME B (FATOU). - <u>Si une fraction rationnelle</u> $F = \frac{U^*}{V^*}$ <u>possède un développement en série de Taylor au voisinage de l'origine à coefficients entiers (nous dirons ici, si</u> $F \in \Phi_1$), <u>alors on peut choisir</u> U^* <u>et</u> V^* <u>de sorte que</u> $V^*(0) = 1$.

Nous ne rappellerons pas ici la démonstration de ce lemme classique.

PROPOSITION 3. - <u>Si une fraction rationnelle</u> $F = \frac{U^*}{V^*}$ <u>appartient à la famille</u> Φ_q , <u>alors on peut choisir les polynômes</u> U^* <u>et</u> V^* <u>de sorte que</u> $V^*(0) = q$.

La démonstration de cette proposition est calquée sur celle de la proposition 1.

Soit donc une fraction rationnelle F appartenant à Φ_q : $F = \frac{U^*}{V^*}$ (U^* et V^* sont des polynômes) et $F = \frac{U}{V}$ (U et V sont des séries, et $V(0) = q$). On suppose en outre que F est à coefficients non tous entiers ($F \notin \Phi_1$). Utilisant le lemme A, nous pouvons écrire

$$F = \frac{U}{V} = P^* + z^\lambda \frac{W}{V} , \qquad \text{avec } \frac{V}{W} \in \Phi_{q'} , \quad |q'| < |q| .$$

Mais, si $\frac{U}{V}$ est une fraction rationnelle, il en est de même pour $\frac{V}{W}$. Et si la proposition est vraie pour toute famille $\Phi_{q'}$ telle que $|q'| < |q|$, on a alors

$$\frac{V}{W} = \frac{V^*}{W^*} , \qquad \text{avec } W^*(0) = q' ,$$

d'où on déduit immédiatement l'expression

$$F = \frac{P^*V^* + z^\lambda W^*}{V^*} .$$

Or $W^*(0) = W(0) = q'$ entraîne que $V^*(0) = V(0) = q$, et la proposition est démontrée pour la famille Φ_q .

Et nous terminons en remarquant que le premier terme de cette récurrence (proposition vraie pour Φ_1) est le lemme initial de Fatou.

5. Résultats plus fins. Sous-familles fermées.

Nous remarquerons qu'une série à coefficients entiers $V(z) = \sum_0^\infty v_k z^k$, telle que $v_0 = q$, peut s'écrire sous la forme $V = EV'$, où $E(z) = \sum_0^\infty e_k z^k$ est une unité de l'anneau des séries à coefficients entiers ($e_0 = 1$) et où $V'(z) = \sum_0^\infty v'_k z^k$ possède la propriété

$$v'_0 = q \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant v'_k \leqslant q - 1 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k .$$

En effet, nous avons

$$v_k = \sum_{j=0}^{k} v'_j \; e_{k-j} = v'_k + N + qe_k \quad ,$$

où N est un nombre entier fonction des différents coefficients de rang $\leqslant k - 1$. Il suffit alors de prendre

$$e_k = \left[\frac{v_k - N}{q}\right]$$

pour que v'_k, reste de la division de $v_k - N$ par q, soit compris entre 0 et $q - 1$. On voit en outre que la série V' ainsi trouvée est unique.

<u>Définition</u>. - La série unique V', déterminée à partir de V comme il est indiqué ci-dessus, est appelée <u>réduite</u> de V.

Nous sommes maintenant amenés à considérer des séries appartenant à Φ_q telles que les réduites de leurs dénominateurs coïncident jusqu'à un certain rang.

<u>Définition</u>. - Nous désignons par $\Phi_{q,r,\ldots,t}$, q, r, ..., t étant des entiers fixés, q non nul, r, ..., t compris entre 0 et $q - 1$, la famille des séries F appartenant à Φ_q et telles que, pour une expression au moins $\frac{U}{V} = F$, V ait pour réduite la série

$$q + rz + \ldots + tz^{\nu} + v_{\nu+1} \, z^{\nu+1} + \ldots \quad ,$$

les coefficients de rang supérieur à ν étant quelconques.

<u>Remarque</u>. - Un certain nombre de questions se posent à propos de ces familles : comment elles "s'emboîtent" les unes dans les autres, quelle est l'intersection d'un nombre fini d'entre elles, si certaines familles ou certaines réunions de familles peuvent être caractérisées par des propriétés simples sur V sans qu'il soit nécessaire de faire appel à sa réduite. Tout cela sera étudié ultérieurement.

PROPOSITION 4. - <u>Chaque famille</u> $\Phi_{q,r,\ldots,t}$ <u>est fermée</u>.

La démonstration que nous allons donner utilise une méthode fondamentalement différente de celle utilisée pour la démonstration des trois propositions précédentes.

Soit donc une suite $\{F^{(n)}\}$ de séries appartenant à $\Phi_{q,r,\ldots,t}$, suite convergeant vers une série F. Nous pouvons, sans restriction, supposer que chaque $F^{(n)} = \frac{U^{(n)}}{V^{(n)}}$ possède un dénominateur réduit (par multiplication éventuelle préalable du numérateur et du dénominateur par une unité E convenable). On posera

$$U^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(n)} \, z^k \qquad \text{et} \qquad V^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} v_k^{(n)} \, z^k \quad .$$

Les $\nu + 1$ premiers coefficients de $V^{(n)}$ sont fixés ($v_0^{(n)} = q$, $v_1^{(n)} = r$, ... , $v_\nu^{(n)} = t$). Comme $F^{(n)} \to F$, pour $n \geqslant n_0$, les $\nu + 1$ premiers coefficients de $U^{(n)}$ sont fixes eux aussi ; on posera (pour $n \geqslant n_0$)

$$u_0^{(n)} = u_0 \ , \quad u_1^{(n)} = u_1 \ , \quad \ldots \ , \quad u_\nu^{(n)} = u_\nu \ .$$

Les $F^{(n)}$ appartiennent aux q familles

$$\Phi_{q,r,\ldots,t,0} \ , \ \Phi_{q,r,\ldots,t,1} \ , \ \ldots \ , \ \Phi_{q,r,\ldots,t,q-1} \ ;$$

l'une au moins de ces familles contient donc une sous-suite infinie de $\{F^{(n)}\}$, convergeant vers F . Soit $\Phi_{q,r,\ldots,t,v_{\nu+1}}$ cette famille, la sous-suite extraite de $\{F^{(n)}\}$ étant toujours appelée $\{F^{(n)}\}$, pour simplifier l'exposition. Mais $F^{(n)} \to F$, d'où nous déduisons, de même que précédemment, que, pour $n \geqslant n_1$, le $(\nu + 2)$-ième coefficient de $U^{(n)}$ est fixe lui aussi ; on posera (pour $n \geqslant n_1$): $u_{\nu+1}^{(n)} = u_{\nu+1}$.

En répétant indéfiniment ce processus, nous voyons qu'on peut déterminer deux suites de coefficients

$$\{u_0 \ , \ u_1 \ , \ \ldots \ , \ u_\nu \ , \ u_{\nu+1} \ , \ \ldots \ , \ u_k \ , \ \ldots\} \ ,$$

$$\{q \ , \ r \ , \ \ldots \ , \ t \ , \ v_{\nu+1} \ , \ \ldots \ , \ v_k \ , \ \ldots\} \ ,$$

et que, par la construction même de ces deux suites, le quotient $\frac{U}{V}$, où

$$U = u_0 + \ldots + u_\nu z^\nu + u_{\nu+1} z^{\nu+1} + \ldots + u_k z^k + \ldots \ ,$$

et

$$V = q + \ldots + t z^\nu + v_{\nu+1} z^{\nu+1} + \ldots + v_k z^k + \ldots \ ,$$

est égal à la limite F de la suite $\{F^n\}$, ce qui démontre notre proposition.

6. Fractions rationnelles dans les sous-familles de Φ_q .

Nous pouvons maintenant, en utilisant les propositions précédentes, généraliser le lemme de Fatou aux familles $\Phi_{q,r,\ldots,t}$.

PROPOSITION 5. - Si une fraction rationnelle $F = \frac{U^*}{V^*}$ appartient à la famille $\Phi_{q,r,\ldots,t}$, alors on peut choisir les polynômes U^* et V^* de sorte que V^* ait pour réduite la série

$$q + rz + \ldots + tz^\nu + v_{\nu+1} z^{\nu+1} + \ldots \ ;$$

<u>en fait, on peut même faire mieux et choisir le polynôme</u> V^* <u>lui-même sous la forme</u>

$$q + rz + \dots + tz^{\nu} + v^*_{\nu+1}\ z^{\nu+1} + \dots \ .$$

Soit donc une fraction rationnelle appartenant à $\Phi_{q,r,\dots,t}$: $F = \frac{U}{V}$ (V étant une série qu'on peut supposer, comme au paragraphe précédent, réduite) avec donc

$$V = q + rz + \dots + tz^{\nu} + v_{\nu+1}\ z^{\nu+1} + \dots \ .$$

Soit q' le plus petit diviseur de q tel que F appartienne à $\Phi_{q'}$. F étant une fraction rationnelle, on peut, d'après la proposition 3, écrire $F = \frac{U'^*}{V'^*}$, U'^* et V'^* étant des polynômes tels que $V'^*(0) = q'$. $\frac{U'^*}{V'^*}$ est une expression primitive de F , et on a donc, d'après la proposition 2,

$$U = U'^*D \qquad \text{et} \qquad V = V'^*D \ .$$

Il suffit alors de prendre le polynôme D^* formé par les $\nu + 1$ premiers termes de D pour vérifier que si $U^* = U'^*D^*$ et $V^* = V'^*D^*$, $\frac{U^*}{V^*}$ est une expression de F et que V^* a les mêmes $\nu + 1$ premiers termes que V , c'est-à-dire possède la propriété recherchée.

7. Etude de certains ensembles de sous-familles.

<u>Familles</u> $\Phi_{q,r}$. - Le cas de ces familles est particulièrement simple :

(a) $F = \frac{U}{V}$, où $V = q + v_1\ z + \dots$, appartient à $\Phi_{q,r}$ équivaut à $v_1 \equiv r \pmod q$.

(b) On vérifiera aisément que $\Phi_{\delta,\rho}$ est contenu dans les λ familles $\Phi_{\lambda\delta,r}$, où

$$r \equiv \lambda\rho + \alpha\delta \pmod{\lambda\delta} , \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \lambda - 1 \ .$$

Inversement, on peut chercher l'intersection de deux familles Φ_{q,r_1} , Φ_{q,r_2} . Il ne semble pas exister d'expression simple de cette intersection. Néanmoins, en posant $q = \lambda\delta$ dans la congruence ci-dessus, on se convaincra que si

$$\Phi_{\delta,\rho} \subseteq \Phi_{q,r_1} \cap \Phi_{q,r_2} \ ,$$

alors δ est un diviseur de $(q\ ,\ r_1 - r_2)$. Par ailleurs, une telle intersection n'est jamais vide, car elle contient au moins Φ_1 .

<u>Familles</u> $\Phi_q(d_1\ ,\ d_2\ ,\ \dots\ ,\ d_h)$. - Si on effectue le produit $W = EV$ de la

série V , possédant la propriété que d divise ses coefficients $v_0, v_1, \dots, v_\nu$, par une unité E ($e_0 = 1$), on constate que la série W possède la même propriété que V : d divise ses coefficients $w_0, w_1, \dots, w_\nu$; en outre, on voit que

$$w_{\nu+1} \equiv v_{\nu+1} \pmod d \quad .$$

Nous avons donc là une propriété qui se manifeste de la même manière sur une série V et sur sa réduite. Considérons alors une suite de diviseurs de q :

$$d_1 | q \ , \ d_2 | d_1 \ , \ \dots \ , \ d_h | d_{h-1} \qquad (d_h \geqslant 2) \ .$$

Nous désignerons par $\Phi_q(d_1, d_2, \dots, d_h)$ la famille des séries F appartenant à Φ_q et telles que, pour une expression au moins $\frac{U}{V} = F$, on ait

$$v_0 = q \ , \ d_1 | v_1 \ , \ d_2 | v_2 \ , \ \dots \ , \ d_h | v_h \quad .$$

Ce qui précède montre que

$$\Phi_q(d_1, \dots, d_h) = \bigcup_{d_1 | r, \dots, d_h | t} \Phi_{q,r,\dots,t} \quad ,$$

et que, par conséquent, chaque famille $\Phi_q(d_1, \dots, d_h)$ est fermée.

La remarque du fait que

$$w_{h+1} \equiv v_{h+1} \pmod{d_h}$$

permet enfin de distinguer deux sous-familles fermées (d'intersection non vide) de $\Phi_q(d_1, \dots, d_h)$, caractérisées par la propriété que v_{h+1} est ou non premier avec d_h . Nous terminerons en donnant un exemple précis d'intersection de familles :

On considère les deux plus simples des sous-familles que nous venons de considérer : Φ'_q (déterminée par $(q, v_1) = 1$) et Φ''_q (déterminée par $(q, v_1) \geqslant 2$) ; alors

$$\Phi'_q \cap \Phi''_q = \bigcup_{\substack{d | q \\ (d, \frac{q}{d}) = 1}} \Phi_d \quad .$$

8. Conclusion.

Les résultats qui précèdent peuvent être utilisés pour l'étude des ensembles S_q de nombres algébriques, introduits par C. PISOT. Ils permettent notamment de généraliser les sous-ensembles fermés de S_q étudiés par C. PISOT, sous-ensembles qui