Yvette Amice

Interpolation p-adique sur le cercle unité

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 5 (1963-1964), exp. n° 4, p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1963-1964__5__A4_0>

INTERPOLATION p-ADIQUE SUR LE CERCLE UNITÉ

par Yvette AMICE

(Rédigé par Wadih MOHANNA)

Soit $U = \mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \,;\, |x| = 1\}$, et soit $n \to u_n$, $n \geqslant 0$, une suite très bien répartie (T. B. R.) dans U . On sait alors que toute fonction continue sur U , $f \in \mathcal{C}(U)$, admet un développement convergent en série d'interpolation :

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n \, Q_n(x) \qquad \text{où} \quad Q_n(x) = \frac{(x - u_0)(x - u_1) \ldots (x - u_{n-1})}{(u_n - u_0)(u_n - u_1) \ldots (u_n - u_{n-1})} \; .$$

On sait d'autre part qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $n \to \alpha^n$ soit T. B. R. dans U est que :

- $\overline{\alpha}$ soit racine primitive $(p - 1)$-ème de l'unité,
- $v(\alpha^{p-1}) = 1$.

Il en résulte que, $\forall f \in \mathcal{C}(U)$, on peut écrire :

$$f = \sum_{n\geqslant 0} u_n (1 - x)(1 - \frac{x}{\alpha}) \ldots (1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}}) \tag{1}$$

où $|u_n(1 - \alpha^n) - (1 - \alpha)| \to 0$.

Cas des séries de Laurent convergentes sur U : Coefficients d'interpolation des séries de Laurent.

PROPOSITION. - Soient

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{x^n}$$

où $a_n \to 0$, $n \to \infty$, et

$$\varphi(x) = x \sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{(x - \alpha) \ldots (x - \alpha^{n-1})}{(1 - \alpha) \ldots (1 - \alpha^{n-1})} \qquad \varphi \in \mathcal{C}(U) \; .$$

Alors la série d'interpolation de f sur la suite (α^n) est :

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 0} u_n (1 - x)(1 - \frac{x}{\alpha}) \ldots (1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}})$$

où $u_n = \varphi(\alpha^{-n})$.

Démonstration :

- Les polynômes $A_n(x) = x\frac{(x-\alpha)\ \ldots\ (x-\alpha^{n-1})}{(1-\alpha)\ \ldots\ (1-\alpha^{n-1})}$, $n \geqslant 1$ forment une base normale de $\mathcal{C}(U)$.

- Posons d'autre part :

$$\frac{1}{x^k} = \sum_{n\geqslant 0} d_{n,k}(1-x)(1-\frac{x}{\alpha})\ \ldots\ (1-\frac{x}{\alpha^{n-1}}) .$$

On a

$$\frac{1}{x^k} - \frac{1}{x^{k-1}} = \frac{1-x}{x^k} = \sum_{n\geqslant 0} (d_{n,k} - d_{n,k-1})(1-x)(1-\frac{x}{\alpha})\ \ldots\ (1-\frac{x}{\alpha^{n-1}}) .$$

Or

$$\alpha^k\,\frac{1-x}{x^k} = (1-x)\sum_{n\geqslant 0} d_{n,k}(1-\frac{x}{\alpha})(1-\frac{x}{\alpha^2})\ \ldots\ (1-\frac{x}{\alpha^n})$$

$$= \sum_{n\geqslant 0} d_{n,k}(1-x)(1-\frac{x}{\alpha})\ \ldots\ (1-\frac{x}{\alpha^n}) .$$

Donc

$$\frac{1-x}{x^k} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{d_{n,k}}{\alpha^k}(1-x)(1-\frac{x}{\alpha})\ \ldots\ (1-\frac{x}{\alpha^n})$$

$$= \sum_{n\geqslant 1} \frac{d_{n-1,k}}{\alpha^k}(1-x)(1-\frac{x}{\alpha})\ \ldots\ (1-\frac{x}{\alpha^{n-1}}) .$$

On a donc la suite d'identités :

$$d_{0,k} - d_{0,k-1} = 0 \qquad \forall\, k \geqslant 1$$

$$\alpha^k(d_{n,k} - d_{n,k-1}) = d_{n-1,k} \qquad \forall\, n \geqslant 1 \ \text{ et }\ k \geqslant 1 .$$

Ceci, avec $d_{0,k} = 1$ pour $k = 1$, détermine les $d_{n,k}$ de façon unique.

Or, on peut voir que les coefficients $A_k(\alpha^{-n})$ vérifient ces mêmes conditions. On a donc :

$$\frac{a_k}{x^k} = \sum_{n\geqslant 1} a_k\, d_{n,k}(1-x)(1-\frac{x}{\alpha})\ \ldots\ (1-\frac{x}{\alpha^{n-1}})$$

et

$$f(x) = \sum_{k\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1} a_k\, d_{n,k}(1-x)(1-\frac{x}{\alpha})\ \ldots\ (1-\frac{x}{\alpha^{n-1}})$$

$$= \sum_{n\geqslant 1}\Big(\sum_{k\geqslant 1} a_k\, d_{n,k}\Big)(1-x)(1-\frac{x}{\alpha})\ \ldots\ (1-\frac{x}{\alpha^{n-1}}) .$$

Or

$$\varphi(\alpha^{-n}) = \sum_{k\geqslant 1} a_k\, A_k(\alpha^{-n}) = \sum_{k\geqslant 1} a_k\, d_{n,k} .$$

On a donc bien :

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 1} \varphi(\alpha^{-n})(1 - x)(1 - \frac{x}{\alpha}) \dots (1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}}) .$$

COROLLAIRE. - Pour que la fonction

$$\sum_{n\geqslant 0} b_n(1 - x)(1 - \frac{x}{\alpha}) \dots (1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}}) = f(x)$$

appartienne à $L(U)$ (c'est-à-dire soit une série de Laurent convergente sur U et de la forme $\sum_{n\geqslant 1} \frac{c_n}{x^n}$, $c_n \to 0$), il faut et il suffit qu'il existe $\varphi \in \mathcal{C}(U)$ telle que $b_n = \varphi(\alpha^{-n})$.

On aura alors :

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 1} a_{-n} x^{-n} ,$$

un a_{-n} étant défini par :

$$\varphi(x) = x \sum_{n\geqslant 1} a_{-n} \frac{(x - \alpha) \dots (x - \alpha^{n-1})}{(1 - \alpha) \dots (1 - \alpha^{n-1})} .$$

<u>Séries de Taylor et séries de Laurent.</u>

PROPOSITION. - <u>Soit</u> $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} a_n X^{-n}$ <u>une série de Laurent restreinte</u> $(a_n \to 0)$. <u>La série de Taylor de sa somme au point</u> α , $|\alpha| = 1$, <u>s'écrit</u>

$$f(x) = \sum_{k\geqslant 0} \Phi(k , \frac{1}{\alpha})(1 - \frac{x}{\alpha})^k$$

<u>où</u>

$$\Phi(t , y) = \sum_{n\geqslant 0} a_{m+1} y^{n+1} \binom{t + n}{n} ,$$

$$\Phi(t , y) \in \mathcal{C}_t(\mathbb{Z}_p) \hat{\otimes} A(\mathbb{Z}_p) .$$

1° On a, pour $|1 - \frac{x}{\alpha}| < 1$,

$$\frac{1}{x^{n+1}} = \frac{1}{\alpha^{n+1}} \sum_{k\geqslant 1} \binom{-(n + 1)}{k} (\frac{x}{\alpha} - 1)^k ,$$

soit

$$\frac{1}{x^{n+1}} = \frac{1}{\alpha^{n+1}} \sum_{k\geqslant 1} \binom{n + k - 1}{n - 1} (1 - \frac{x}{\alpha})^k .$$

2° Les polynômes $\binom{t + n}{n}$ constituent une base normale de $\mathcal{C}_t(\mathbb{Z}_p)$. La proposition résulte immédiatement des deux remarques ci-dessus.

COROLLAIRE. - <u>La série</u> $\sum_{k\geqslant 0} b_k(1 - \frac{x}{\alpha})^k$ <u>est la série de Taylor au point</u> α <u>de la somme d'une série de Laurent à la condition nécessaire et suffisante qu'il existe une fonction</u> $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p)$ <u>telle que</u> $b_k = \varphi(k)$.
