Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres

HUBERT DELANGE

Théorèmes taubériens et applications arithmétiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 4 (1962-1963), exp. n° 16, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1962-1963__4__A14_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des Nombres)
4e année, 1962/63, n° 16

18 mars et 13 mai 1963

THÉORÈMES TAUBÉRIENS ET APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES

par Hubert DELANGE

Il convient d'expliquer d'abord brièvement ce que l'on entend par "théorèmes taubériens". Je dirai simplement ceci :

Considérons un opérateur qui transforme une fonction, par exemple $s(t)$ définie pour $t \geqslant 0$, en une autre fonction, soit $\Phi(x)$. Cette autre fonction sera définie, par exemple, par

$$\Phi(x) = \int_0^{+\infty} N(xt)\ s(t)\ dt\ .$$

Pour cet opérateur, on appellera théorème "abélien" un théorème d'après lequel une propriété de la fonction s entraîne une propriété de la fonction Φ.

On appellera théorème "taubérien" un théorème d'après lequel une propriété de la fonction Φ entraîne, moyennant une hypothèse convenable sur la fonction s, une propriété de cette dernière fonction.

C'est souvent une réciproque d'un théorème abélien, mais il n'en est pas forcément ainsi.

Une classe importante de théorèmes taubériens est constituée par les théorèmes inverses des procédés de sommation des séries divergentes.

Ici, je considérerai des théorèmes taubériens relatifs à l'intégrale de Laplace. L'opérateur qui est en jeu est la transformation de Laplace.

$\alpha(t)$ sera une fonction définie pour $t \geqslant 0$, mesurable et bornée sur tout intervalle fini. On supposera que l'intégrale de Laplace $\int_0^{+\infty} e^{-st}\ \alpha(t)\ dt$ a une abscisse de convergence $< +\infty$, et on posera

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\ \alpha(t)\ dt$$

quand l'intégrale converge.

On fera intervenir les propriétés de $f(s)$ dans le domaine complexe.

Un exemple bien connu est le théorème de Ikehara :

On suppose que α est croissante et que l'intégrale est convergente pour $\Re s > a$, avec $a > 0$.

Si f est holomorphe en tous les points de la droite $\Re s = a$ autres que a, lequel est un pôle simple de résidu A (nécessairement > 0), on a pour t infini

$$\alpha(t) \sim Ae^{at}.$$

1. - Je donnerai d'abord deux théorèmes du même genre, mais dans lesquels le point a est un point singulier d'un type autre qu'un pôle simple ([1])

On suppose encore que la fonction α est croissante et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st}\,\alpha(t)\,dt$, dont la valeur est désignée par $f(s)$, est convergente pour $\Re s > a$, avec $a > 0$.

Les puissances de $s - a$ et $\log \frac{1}{s-a}$ sont pris avec leur valeur principale.

THÉORÈME 1. - On suppose que pour $\Re s > a$

$$f(s) = (s-a)^{-\rho}\, g(s) + h(s)$$

ou même plus généralement

$$f(s) = (s-a)^{-\rho}\, g(s) + \sum_{j=1}^{N} (s-a)^{-\lambda_j - i\mu_j}\, g_j(s) + h(s)$$

avec ρ réel non égal à un entier ≤ 0, g et h holomorphes pour $\Re s \geq a$, $g(a) \neq 0$, et, dans le second cas, les fonctions g_j holomorphes pour $\Re s \geq a$ et les $\lambda_j < \rho$.

Alors on a pour t infini

$$\alpha(t) \sim \frac{g(a)}{\Gamma(\rho)}\, e^{at}\, t^{\rho-1}.$$

THÉORÈME 2. - On suppose que, pour $\Re s > a$,

$$f(s) = \sum_{j=0}^{q} g_j(s) \left(\log \frac{1}{s-a}\right)^j \qquad (q \geq 1)$$

où les fonctions g_j sont holomorphes pour $\Re s \geq a$ et $g_q(a) \neq 0$.

Alors on a pour t infini

$$\alpha(t) \sim q g_q(a)\, e^{at}\, \frac{(\log t)^{q-1}}{t}.$$

([1]) Ces deux théorèmes sont des cas particuliers d'un théorème général que je n'indique pas ici (cf. H. DELANGE : "Généralisation du théorème de Ikehara", Annales scient. Ec. Norm. Sup., t. 71, 1954, p. 213-242).

Indiquons d'abord deux corollaires dont nous donnerons ensuite des applications.

Nous considérons un ensemble A d'entiers > 0 et nous désignons par $\nu(x)$ le nombre des nombres de A au plus égaux à x.

La série de Dirichlet $\sum_{n\in A} \frac{1}{n^s}$ est absolument convergente pour $\Re s > 1$. Nous désignons sa somme par $F(s)$.

THÉORÈME A. - *Supposons que l'on ait pour* $\Re s > 1$

$$F(s) = (s-1)^{-\rho} G(s) + H(s)$$

ou même plus généralement

$$F(s) = (s-1)^{-\rho} G(s) + \sum_{j=1}^{N} (s-1)^{-\lambda_j - i\mu_j} G_j(s) + H(s)$$

avec ρ *réel non égal à un entier* $\leqslant 0$, G *et* H *holomorphes pour* $\Re s \geqslant 1$, $G(1) \neq 0$, *et, dans le second cas, les fonctions* G_j *holomorphes pour* $\Re s \geqslant 1$ *et les* $\lambda_j < \rho$.

Alors on a pour x *infini*

$$\nu(x) \sim \frac{G(1)}{\Gamma(\rho)} x(\log x)^{\rho-1}.$$

THÉORÈME B. - *Supposons que l'on ait pour* $\Re s > 1$

$$F(s) = \sum_{j=0}^{q} G_j(s)(\log \frac{1}{s-1})^j \qquad (q \geqslant 1)$$

où les fonctions G_j *sont holomorphes pour* $\Re s \geqslant 1$ *et* $G_q(1) \neq 0$.

Alors on a pour x *infini*

$$\nu(x) \sim q G_q(1) \frac{x(\log\log x)^{q-1}}{\log x}.$$

Ces deux résultats s'obtiennent immédiatement en observant que l'on a pour $\Re s > 1$

$$F(s) = s \int_0^{+\infty} e^{-st} \nu(e^t)\, dt.$$

Les applications que nous donneront seront basées uniquement sur le fait que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a aucun zéro de partie réelle 1.

Ceci entraîne l'existence d'un domaine simplement connexe Δ contenant le demi-plan fermé $\Re s \geqslant 1$ et contenu dans le demi-plan ouvert $\Re s > 1/2$, tel que $\zeta(s)$ n'ait aucun zéro dans Δ.

On voit alors qu'il existe une fonction $r(s)$ holomorphe dans Δ telle que, P désignant l'ensemble des nombres premiers, on ait pour $\Re s > 1$

(1) $$\sum_{p\in P} \frac{1}{p^s} = \log \frac{1}{s-1} + r(s)$$

où $\log \frac{1}{s-1}$ est pris avec sa valeur principale.

En effet, la fonction $(s-1)\,\zeta(s)$ est holomorphe et non nulle dans Δ et réelle >0 pour s réel >1. Par suite, il existe une branche de la fonction $\log[(s-1)\,\zeta(s)]$ holomorphe dans Δ et réelle pour s réel >1. On voit immédiatement que, pour $\Re s > 1$, cette fonction est égale à

$$-\log \frac{1}{s-1} + \sum_{p\in P} \frac{1}{p^s} + \sum_{\substack{p\in P \\ j>1}} \frac{1}{jp^{js}} .$$

Or la seconde somme représente une fonction holomorphe pour $\Re s > 1/2$.

Notons en passant que le théorème B, permet de déduire immédiatement le théorème des nombres premiers de la formule (1).

Ceci dit, désignons par $\omega(n)$ le nombre des diviseurs premiers de l'entier positif n, et par $\Omega(n)$ le nombre total des facteurs dans la décomposition de n en facteur premiers. Autrement dit, appelons ω et Ω les fonctions définies sur l'ensemble des entiers >0 de la façon suivante :

$$\omega(1) = \Omega(1) = 1$$

et, si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, où $p_1, p_2, \cdots, p_k$ sont des nombres premiers différents et $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ des entiers >0,

$$\omega(n) = k \quad \text{et} \quad \Omega(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k .$$

On voit aisément que, pour $\Re s > 1$ et $|z| \leq 1$,

$$\sum_1^{+\infty} \frac{z^{\omega(n)}}{n^s} = \prod_{p\in P} \left[1 + \frac{z}{p^s - 1}\right]$$

$$= \left\{ \prod_{p\in P} \left[1 + \frac{z}{p^s-1}\right] \exp\left[-\frac{z}{p^s-1}\right] \right\} \exp\left\{ z \sum_{p\in P} \frac{1}{p^s} + z \sum_{p\in P} \frac{1}{p^s(p^s-1)} \right\} .$$

Le produit infini représente une fonction de s et z holomorphe pour $\Re s > 1/2$ et la série

$$\sum_{p\in P} \frac{1}{p^s(p^s-1)}$$

une fonction de s holomorphe pour $\Re s > 1/2$.

Alors, en tenant compte de (1), on voit que, pour $\Re s > 1$ et $|z| \leq 1$,

(2) $$\sum_1^{+\infty} \frac{z^{\omega(n)}}{n^s} = \mathcal{G}(s, z) \exp\left\{ z \log \frac{1}{s-1} \right\}$$

où $\mathcal{G}$ est une fonction de s et z holomorphe pour $s \in \Delta$.

On voit de la même manière qu'il existe une fonction $\mathcal{K}(s , z)$ holomorphe pour $s \in \Delta$ et z quelconque et $\neq 0$ pour $s \in \Delta$ et $|z| < \sqrt{2}$, telle que, Q étant l'ensemble des entiers positifs "quadratfrei", on ait pour $\Re s > 1$ et $|z| \leqslant 1$

$$(3) \qquad \sum_{n \in Q} \frac{z^{\omega(n)}}{n^s} = \mathcal{K}(s , z) \exp\{z \log \frac{1}{s - 1}\} .$$

On a aussi, pour $\Re s > 1$ et $|z| \leqslant 1$,

$$(4) \qquad \sum_{1}^{+\infty} \frac{z^{\Omega(n)}}{n^s} = \frac{1}{\mathcal{K}(s , - z)} \exp\{z \log \frac{1}{s - 1}\} .$$

On voit immédiatement que

$$\mathcal{G}(s , 0) = \mathcal{K}(s , 0) = \mathcal{G}(1 , 1) = \mathcal{K}(1 , - 1) = 1$$

et $\mathcal{K}(1 , 1) = \frac{6}{\pi^2}$.

Par ailleurs, il est utile pour la suite d'introduire les développements de $\mathcal{G}(s , z)$, $\mathcal{K}(s , z)$ et $\frac{1}{\mathcal{K}(s , - z)}$ en série entière en z . On a

$$(5) \qquad \mathcal{G}(s , z) = \sum_{j=0}^{+\infty} A_j(s) z^j .$$

$$(6) \qquad \mathcal{K}(s , z) = \sum_{j=0}^{+\infty} B_j(s) z^j .$$

et

$$(7) \qquad \frac{1}{\mathcal{K}(s , - z)} = \sum_{j=0}^{+\infty} C_j(s) z^j ,$$

pour $s \in \Delta$ et z quelconque pour les deux premières formules, $|z| < \sqrt{2}$ pour la troisième, toutes les fonctions A_j , B_j , C_j étant holomorphes dans Δ .

Il est clair que

$$A_0(s) = B_0(s) = C_0(s) = 1 .$$

Ces différentes formules vont nous permettre, grâce aux théorèmes A et B, d'établir un certain nombre de résultats concernant les fonctions ω et Ω [2].

a. Soient q un entier > 1 et r un entier quelconque.

Si, dans la formule (2), on prend $z = \alpha^k$, avec $\alpha = \exp[\frac{2\pi i}{q}]$, on obtient, après multiplication par α^{-rk} ,

---

[2] Ces différents résultats, et un bon nombre d'autres, se trouvent dans H. DELANGE : "Sur la distribution des entiers ayant certaines propriétés", Ann. scient. Ecole Norm. Sup., Série 3, t. 73, 1956, p. 15-74.

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{\alpha^{k[\omega(n)-r]}}{n^s} = \alpha^{-rk}(s-1)^{-\alpha^k}\, \mathcal{S}(s\,,\,\alpha^k)\,.$$

En additionnant les formules correspondant à $k = 0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ \ldots\,,\ q-1$, et divisant par q, on obtient

$$\sum_{\omega(n)\equiv r \pmod q} \frac{1}{n^s} = (s-1)^{-1}\,\frac{\mathcal{S}(s\,,\,1)}{q} + \sum_{k=1}^{q-1} (s-1)^{-\alpha^k}\,\frac{\alpha^{-rk}}{q}\,\mathcal{S}(s\,,\,\alpha^k)\,.$$

Le théorème A permet de déduire de là que <u>le nombre des</u> $n \leqslant x$ <u>pour lesquels</u>

$$\omega(n) \equiv r \pmod q$$

<u>est équivalent pour</u> x <u>infini à</u> x/q .

En faisant un calcul semblable sur la formule (4) au lieu de la formule (2), on voit que :

<u>Le nombre des</u> $n \leqslant x$ <u>pour lesquels</u>

$$\Omega(n) \equiv r \pmod q$$

<u>est équivalent pour</u> x <u>infini à</u> x/q .

Avec la formule (3), on trouve que :

<u>Le nombre des</u> n "<u>quadratfrei" et</u> $\leqslant x$ <u>pour lesquels</u>

$$\omega(n) \equiv r \pmod q$$

<u>est équivalent pour</u> x <u>infini à</u> $\frac{1}{q} \times \frac{6}{\pi^2}\, x$.

b. Soit maintenant q un entier $\geqslant 1$.

En égalant les coefficients de z^q dans les développements en séries entières des deux membres de (2), on obtient, compte-tenu de (5),

$$(8) \qquad \sum_{\omega(n)=q} \frac{1}{n^s} = \sum_{j=0}^{q} \frac{A_j(s)}{(q-j)!}\,(\log \frac{1}{s-1})^{q-j}\,.$$

Le théorème B permet d'en conclure que :

- <u>le nombre des</u> $n \leqslant x$ <u>pour lesquels</u> $\omega(n) = q$ <u>est équivalent pour</u> x <u>infini à</u> $\dfrac{x(\log\log x)^{q-1}}{(q-1)!\,\log x}$.

En égalant les coefficients de z^q dans les développements en séries entières des deux membres de la formule (4), on obtient, compte tenu de (7),

$$(9) \qquad \sum_{\Omega(n)=q} \frac{1}{n^s} = \sum_{j=0}^{q} \frac{C_j(s)}{(q-j)!}\,[\log \frac{1}{s-1}]^{q-j}\,,$$

et le théorème B permet d'en conclure que :

- le nombre des $n \leqslant x$ pour lesquels $\Omega(n) = q$ est équivalent pour x infini à $\dfrac{x(\log\log x)^{q-1}}{(q-1)!\,\log x}$.

En partant de la formule (3) on trouve

$$(10) \qquad \sum_{\substack{n\in Q \\ \omega(n)=q}} \frac{1}{n^s} = \sum_{j=0}^{q} \frac{B_j(s)}{(q-j)!} \left[\log \frac{1}{s-1}\right]^{q-j} ,$$

ce qui montre que :

- le nombre des n "quadratfrei" et $\leqslant x$ pour lesquels $\omega(n) = q$ est aussi équivalent pour x infini à $\dfrac{x(\log\log x)^{q-1}}{(q-1)!\,\log x}$.

Le nombre des n "quadratfrei" et $\leqslant x$ pour lesquels $\omega(n) = q$ est donc équivalent à celui de tous les $n \leqslant x$ pour lesquels on a $\omega(n) = q$.

On peut évaluer la différence car, en retranchant (10) de (8), on obtient

$$\sum_{\substack{\omega(n)=q \\ \Omega(n)>q}} \frac{1}{n^s} = \sum_{j=0}^{q} \frac{A_j(s) - B_j(s)}{(q-j)!} \left[\log \frac{1}{s-1}\right]^{q-j} ,$$

Le terme correspondant à $j = 0$ disparaît, car $A_0(s) = B_0(s) = 1$. Pour $q = 1$, on obtient

$$\sum_{\substack{\omega(n)=1 \\ \Omega(n)>1}} \frac{1}{n^s} = A_1(s) - B_1(s) ,$$

ce qui montre, puisque la série est convergente pour $\Re s > 1/2$, que

$$A_1(1) - B_1(1) = \sum_{\substack{\omega(n)=1 \\ \Omega(n)>1}} \frac{1}{n} = \sum_{p\in P} \frac{1}{p(p-1)} .$$

Pour $q \geqslant 2$, le théorème B montre que :

- le nombre des $n \leqslant x$ pour lesquels $\omega(n) = q$ et $\Omega(n) > q$ est équivalent pour x infini à

$$C\,\frac{x(\log\log x)^{q-2}}{(q-2)!\,\log x} , \quad \text{où} \quad C = \sum_{p\in P} \frac{1}{p(p-1)} .$$

On peut même évaluer le nombre des $n \leqslant x$ tels que

$$\omega(n) = q \text{ et } \Omega(n) = q + r , \text{ avec } q \geqslant 2 \text{ et } r \geqslant 1 .$$

On trouve que ce nombre est équivalent pour x infini à

$$C_r \frac{x(\log\log x)^{q-2}}{(q-2)!\log x}, \quad \text{où} \quad C_r = \sum_{p\in P} \frac{1}{p^{r+1}}.$$

Pour cela, on considère la série

$$\sum_1^{+\infty} \frac{u^{\omega(n)} v^{\Omega(n)}}{n^s}.$$

On voit que, pour $\Re s > 1$, $|u| \leq 1$ et $|v| \leq 1$,

$$\sum_1^{+\infty} \frac{u^{\omega(n)} v^{\Omega(n)}}{n^s} = \prod_{p\in P} \left[1 + \frac{uv}{p^s - v}\right] = \mathfrak{F}(s, uv, v) \exp\{uv \log \frac{1}{s-1}\},$$

où $\mathfrak{F}(s, z, z')$ est une fonction holomorphe pour $s \in \Delta$, z quelconque et $|z'| < \sqrt{2}$.

Le résultat indiqué s'obtient en considérant le coefficient de $u^q v^{q+r}$ dans les développements en séries de puissances de u et v des membres extrêmes.

La même formule permet aussi d'établir le résultat suivant :

Si q et q' sont deux entiers > 1 et premiers entre eux (3), et r et r' deux entiers quelconques, le nombre des n au plus égaux à x pour lesquels

$$\omega(n) \equiv r \pmod q \quad \text{et} \quad \Omega(n) \equiv r' \pmod{q'}$$

est équivalent, pour x infini, à $\frac{x}{qq'}$.

2. - Les théorèmes 1 et 2 étaient des cas particulier d'un même théorème général que je n'ai pas indiqué.

Je vais maintenant donner un autre théorème général.

Avant de donner l'énoncé, il me faut quelques préliminaires.

Je définis tout d'abord ce que l'on appellera une fonction à croissance régulière, d'ordre ρ :

c'est une fonction $V(t)$ définie pour t positif assez grand, > 0 pour t positif assez grand et telle que, quand t tend vers $+\infty$, $\frac{V(\lambda t)}{V(t)}$ tend vers λ^ρ uniformément sur tout intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$, où $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

Ceci revient à dire que $V(t) = t^\rho L(t)$, où $L(t) > 0$ pour $t > 0$ assez grand et, quand t tend vers $+\infty$, $\frac{L(\lambda t)}{L(t)}$ tend vers 1, uniformément sur tout intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$, où $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

---

(3) La condition que q et q' soient premiers entre eux a été oubliée dans l'énoncé qui figure dans notre mémoire cité plus haut.

Comme exemples de telles fonctions, on peut prendre

$$t^\rho \ , \ t^\rho (\log t)^\alpha \ , \ t^\rho (\log t)^\alpha (\log\log t)^\beta \ , \ \ldots$$

Ceci dit, α étant une fonction réelle ou complexe définie pour $t \geqslant 0$ et bornée sur tout intervalle fini, et V une fonction à croissance régulière, on posera, pour $h > 0$,

$$w_{V,\alpha}(h) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{V(t)} \{ \sup_{t\leqslant t'\leqslant t+h} |\alpha(t') - \alpha(t)| \}$$

et, si la fonction α est réelle,

$$\varpi_{V,\alpha}(h) = - \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{V(t)} \{ \inf_{t\leqslant t'\leqslant t+h} [\alpha(t') - \alpha(t)] \} \ .$$

Chacune de ces deux fonctions est $\geqslant 0$ et finie ou non. On voit sans peine qu'elle est ou toujours finie ou toujours égale à $+\infty$. Dans le premier cas, elle est croissante et tend vers une limite finie $\geqslant 0$ quand h tend vers 0 .

Maintenant, le théorème annoncé est le suivant :

THÉORÈME 3. - Soit α une fonction réelle ou complexe définie pour $t \geqslant 0$, mesurable et bornée sur tout intervalle fini, et telle que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \alpha(t) \, dt$$

soit convergente pour $\mathrm{R}s > 0$ et égale à $f(s)$.

Soit V une fonction à croissance régulière d'ordre ρ , et soit m un entier $\geqslant 0$.

On suppose $\rho \geqslant -m$, avec $t^m V(t)$ croissante pour t assez grand si $\rho = -m$.

Ceci dit, on suppose que

1° ou bien $w_{V,\alpha}(h) < +\infty$ pour tout $h > 0$ et

$$\lim_{h\to 0} w_{V,\alpha}(h) = 0 \ ,$$

ou bien $\alpha(t)$ est réelle, $\varpi_{V,\alpha}(h) < +\infty$ pour tout $h > 0$ et

$$\lim_{h\to 0} \varpi_{V,\alpha}(h) = 0 \ ;$$

2° f est holomorphe en tous les points de la droite $\mathrm{R}s = 0$ autres que 0 et, quand s tend vers 0 dans le demi-plan $\mathrm{R}s > 0$,

$$f^{(m)}(s) = O[r^{-m} V(\tfrac{1}{r}) \varphi(r)] \qquad (r = |s|) \ ,$$

où φ est une fonction positive définie pour $t > 0$ assez petit et telle que les intégrales

$$\int_0 \varphi(t)\, dt \quad \text{et} \quad \int_0 \varphi(t) \log \frac{t^m}{V(1/t)}\, dt$$

convergent.

Alors, quand t tend vers $+\infty$,

$$\alpha(t) = o[V(t)] .$$

a. Comme premier corollaire particulier, je donnerai le suivant.

THÉORÈME C. - Soit α une fonction réelle ou complexe définie pour $t \geqslant 0$, mesurable et bornée sur tout intervalle fini et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st}\, \alpha(t)\, dt$ soit convergente pour $\Re s > 0$.

Posons, pour $\Re s > 0$,

$$F(s) = s \int_0^{+\infty} e^{-st}\, \alpha(t)\, dt .$$

Supposons que

1° ou $w_{1,\alpha}(h) < +\infty$ pour tout $h > 0$ et

$$\lim_{h \to 0} w_{1,\alpha}(h) = 0 ,$$

ou $\alpha(t)$ est réelle, $\varpi_{1,\alpha}(h) < +\infty$ pour tout $h > 0$ et

$$\lim_{h \to +0} \varpi_{1,\alpha}(h) = 0 ;$$

2° F est holomorphe pour $\Re s \geqslant 0$.

Alors, quand t tend vers $+\infty$, $\alpha(t)$ tend vers $F(0)$.

Ceci se déduit immédiatement du théorème 3 en considérant $\alpha_1(t) = \alpha(t) - F(0)$ au lieu de $\alpha(t)$ et prenant $V(t) = 1$ et $m = 0$.

On a pour $\Re s > 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\, \alpha_1(t)\, dt = \frac{F(s) - F(0)}{s}$$

fonction qui est holomorphe pour $\Re s \geqslant 0$.

De plus, $w_{1,\alpha_1}(h) = w_{1,\alpha}(h)$ et, si $\alpha(t)$ est réelle, de sorte que $\alpha_1(t)$ l'est aussi, $\varpi_{1,\alpha_1}(h) = \varpi_{1,\alpha}(h)$.

Le théorème C donne immédiatement le résultat suivant :

Supposons que la série de Dirichlet $\sum_1^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ soit convergente pour $\Re s > 0$, avec pour somme $F(s)$.

Si F est holomorphe pour $\Re s \geqslant 0$ et si na_n est borné, ou bien les a_n sont réels et na_n borné inférieurement, la série $\sum_1^{+\infty} a_n$ est convergente avec pour somme $F(0)$.

En effet, on a pour $\Re s > 0$

$$\sum_1^{+\infty} \frac{a_n}{n^s} = s \int_0^{+\infty} e^{-st}\, \alpha(t)\, dt$$

où $\alpha(t) = \sum_{n \leqslant e^t} a_n$.

Si $|na_n| \leqslant M$, on voit que $w_{1,\alpha}(h) \leqslant Mh$.

Si les a_n sont réels et $na_n \geqslant -M$, $\alpha(t)$ est réelle et $\varpi_{1,\alpha}(h) \leqslant Mh$.

Applications.

1° μ étant la fonction de Möbius, on a pour $\Re s > 0$

$$\sum_1^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n} \times \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\zeta(1+s)} ,$$

$\frac{1}{\zeta(1+s)}$ est holomorphe pour $\Re s \geqslant 0$.

On en déduit que $\sum_1^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n}$ converge, avec pour somme 0.

2° De même, si $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$, la série $\sum_1^{+\infty} \frac{\lambda(n)}{n}$ est convergente avec pour somme 0 car, pour $\Re s > 0$,

$$\sum_1^{+\infty} \frac{\lambda(n)}{n} \times \frac{1}{n^s} = \frac{\zeta[2(1+s)]}{\zeta(1+s)} .$$

3° Λ étant la fonction de Čebyšev définie par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p \text{ si } n = p^k \text{, avec } p \text{ premier et } k \geqslant 1 \\ 0 \text{ si } n \text{ n'est pas de cette forme} \end{cases}$$

on sait que, pour $\Re s > 1$,

$$\sum_1^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)} .$$

Par suite, pour $\Re s > 0$,

$$\sum_1^{+\infty} \frac{\Lambda(n) - 1}{n} \times \frac{1}{n^s} = -\frac{\zeta'(1+s)}{\zeta(1+s)} - \zeta(1+s) ,$$

fonction qui est holomorphe pour $\Re s \geqslant 0$.

Comme $n \times \frac{\Lambda(n) - 1}{n} \geqslant -1$, on en déduit que la série $\sum_1^{+\infty} \frac{\Lambda(n) - 1}{n}$ est convergente, ou, ce qui revient au même, que, quand x tend vers $+\infty$,

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + K + o[1]$$

où K est une constante.

En séparant, parmi les n pour lesquels $\Lambda(n) \neq 0$, les nombres premiers et les puissances de nombres premiers d'exposant > 1, on en déduit aisément que pour x infini

$$\sum_{\substack{p \in P \\ p \leqslant x}} \frac{\log p}{p} = \log x + K' + o[1]$$

où K' est une constante.

b. Comme autre corollaire du théorème 3, je donnerai le résultat suivant.

THÉORÈME D. - *Soit α une fonction réelle définie pour $t \geqslant 0$, croissante pour $t \geqslant 0$, et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st}\, \alpha(t)\, dt$ soit convergente pour $\Re s > 0$ et égale à $f(s)$.*

Si l'on a, pour $\Re s > 0$,

$$f(s) = \frac{1}{s} \sum_{j=0}^{q} g_j(s) (\log \tfrac{1}{s})^j \qquad (q \geqslant 1),$$

les fonctions g_j étant holomorphes pour $\Re s \geqslant 0$, on a, quand t tend vers $+\infty$,

$$\alpha(t) = \sum_{j=0}^{q} c_j (\log t)^j + q g_q'(0) \frac{(\log t)^{q-1}}{t} + o\left[\frac{(\log t)^{q-1}}{t}\right]$$

où

$$c_j = \sum_{h=j}^{q} \binom{h}{j} \gamma^{(h-j)}(1)\, g_h(0),$$

γ étant la fonction entière $1/\Gamma$.

Ceci s'établit de la façon suivante :

ω étant un nombre réel et h un entier $\geqslant 0$, définissons la fonction $\beta_{\omega,h}$ pour $t \geqslant 0$ par

$$\beta_{\omega,h}(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{pour} \quad 0 < t < 1 \\ \dfrac{d^h}{d\omega^h}\left[\dfrac{t^{\omega-1}}{\Gamma(\omega)}\right] = t^{\omega-1} \sum_{j=0}^{h} \binom{h}{j} \gamma^{(h-j)}(\omega) (\log t)^j \quad \text{pour} \quad t \geqslant 1 \end{cases}$$

On voit que, pour $\Re s > 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\, \beta_{\omega,h}(t)\, dt = s^{-\omega}(\log \tfrac{1}{s})^h + \text{fonction entière de } s .$$

Ceci dit, posons

$$\beta(t) = \sum_{j=0}^{q} [g_j(0)\, \beta_{1,j}(t) + g_j'(0)\, \beta_{0,j}(t)] \qquad (4).$$

β est dérivable pour $t > 1$ et l'on voit que, pour t infini,

$$\beta'(t) = O[\frac{(\log t)^{q-1}}{t}] .$$

Par suite, si $V(t) = \frac{(\log t)^{q-1}}{t}$, on a $w_{V,\beta}(h) \leqslant \text{Cte } h$.

Si $\alpha_1(t) = \alpha(t) - \beta(t)$, on a $\varpi_{V,\alpha_1}(h) \leqslant w_{V,\beta}(h) \leqslant \text{Cte } h$.

De plus, pour $\Re s > 0$,

$$f_1(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, \alpha_1(t)\, dt = f(s) - \int_0^{+\infty} e^{-st}\, \beta(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{s} \sum_{j=0}^{q} [g_j(s) - g_j(0) - s g_j'(0)](\log \tfrac{1}{s})^j + \text{fonction entière de } s$$

$$= s \sum_{j=0}^{q} h_j(s)(\log \tfrac{1}{s})^j + \text{fonction entière de } s ,$$

les fonctions h_j étant holomorphes pour $\Re s \geqslant 0$.

La fonction f_1 est donc holomorphe en tous les points de la droite $\Re s = 0$ autres que 0 , et, quand s tend vers 0 dans le demi-plan $\Re s > 0$,

$$f_1'(s) = O[(\log \tfrac{1}{r})^{q-1}] = O[r^{-1} V(\tfrac{1}{r})] , \quad \text{où } r = |s| .$$

Le théorème 3 permet donc de conclure que, pour t infini, $\alpha_1(t) = o[V(t)]$.

Comme application du théorème D, nous allons évaluer la somme

$$\Pi_q(x) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in Q \\ \omega(n)=q}} \frac{1}{n} = \sum_{\substack{p_1, p_2, \ldots, p_q \text{ premiers} \\ p_1 < p_2 < \cdots < p_q \\ p_1 p_2 \cdots p_q \leqslant x}} \frac{1}{p_1\, p_2 \cdots p_q} \qquad (5).$$

En remplaçant s par $1 + s$ dans la formule (10) écrite plus haut, on voit que, pour $\Re s > 0$,

---

(4) On montre sans peine que les fonctions $g_j(s)$ sont réelles pour s réel > 0 .

(5) Rappelons que nous avons désigné par Q l'ensemble des entiers positifs "quadratfrei".

$$\sum_{\substack{n\in Q\\ \omega(n)=q}} \frac{1}{n^{1+s}} = \sum_{j=0}^{q} \frac{B_j(1+s)}{(q-j)!}\left[\log\frac{1}{s}\right]^{q-j} = \sum_{j=0}^{q} \frac{B_{q-j}(1+s)}{j!}\left(\log\frac{1}{s}\right)^{j} .$$

Mais $\sum_{\substack{n\in Q\\ \omega(n)=q}} \frac{1}{n^{1+s}} = \sum_{\substack{n\in Q\\ \omega(n)=q}} \frac{1}{n}\times\frac{1}{n^{s}} = s\int_0^{+\infty} e^{-st}\,\Pi_q(e^t)\,dt$.

On a donc pour $\Re s > 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\,\Pi_q(e^t)\,dt = \frac{1}{s}\sum_{j=0}^{q} \frac{B_{q-j}(1+s)}{j!}\left(\log\frac{1}{s}\right)^{j}$$

et le théorème D permet d'en conclure que, pour t infini,

$$\Pi_q(e^t) = \sum_{j=0}^{q} c_j(\log t)^j + o\left[\frac{(\log t)^{q-1}}{t}\right] .$$

autrement dit que, pour x infini,

$$\Pi_q(x) = \sum_{j=0}^{q} c_j(\log\log x)^j + o\left[\frac{(\log\log x)^{q-1}}{\log x}\right] \tag{11}$$

où

$$c_j = \sum_{h=j}^{q} \binom{h}{j} \gamma^{(h-j)}(1)\,\frac{B_{q-h}(1)}{h!} = \frac{1}{j!}\sum_{h=j}^{q} \frac{\gamma^{(h-j)}(1)}{(h-j)!}\,B_{q-h}(1)$$

$$= \frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{q-j} \frac{\gamma^{(k)}(1)}{k!}\,B_{q-j-k}(1) .$$

Si l'on pose

$$\beta_j = \sum_{h=0}^{j} \frac{\gamma^{(h)}(1)}{h!}\,B_{j-h}(1) ,$$

les coefficients β_j sont déterminés indépendamment de q et l'on voit que $c_j = \frac{\beta_{q-j}}{j!}$.

La formule (11) s'écrit alors

$$\Pi_q(x) = \sum_{j=0}^{q} \frac{\beta_j}{(q-j)!}(\log\log x)^{q-j} + o\left[\frac{(\log\log x)^{q-1}}{\log x}\right] . \tag{12}$$

On voit que β_j est le coefficient de z^j dans le développement en série entière de la fonction entière

$$F(z) = \frac{\mathcal{H}(1\,,\,z)}{\Gamma(1+z)} .$$

On a d'ailleurs

$$F(z) = \frac{e^{-\alpha z}}{\Gamma(1+z)}\prod_{p\in P}\left(1+\frac{z}{p}\right)e^{-z/p} ,$$

où $a = \sum_{p\in P} [\log \frac{1}{1 - 1/p} - \frac{1}{p}]$.

En effet, on a pour $s \in \Delta$ et z quelconque

$$(13) \qquad \mathcal{K}(s , z) = \{ \prod_{p\in P} [1 + \frac{z}{p^s}] \exp[- \frac{z}{p^s}] \} \exp[zr(s)] \qquad (6)$$

où $r(s)$ est la fonction qui figure dans la formule (1), et par suite

$$\mathcal{K}(1 , z) = \{ \prod_{p\in P} [1 + \frac{z}{p}] \exp[- \frac{z}{p}] \} \exp[zr(1)] .$$

Pour obtenir la valeur de $r(1)$ on observe que, pour $z = -1$, la formule (3) donne, pour $\Re s > 1$,

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = (s - 1)\, \mathcal{K}(s , -1)$$

d'où $\mathcal{K}(s , -1) = \frac{1}{(s - 1)\, \zeta(s)}$, ou, en tenant compte de (13),

$$\{ \prod_{p\in P} [1 - \frac{1}{p^s}] \exp[\frac{1}{p^s}] \} \exp[- r(s)] = \frac{1}{(s - 1)\, \zeta(s)} .$$

En faisant tendre s vers 1, on obtient à la limite

$$\{ \prod_{p\in P} (1 - \frac{1}{p}) \exp[\frac{1}{p}] \} \exp[- r(1)] = 1$$

et, comme $r(1)$ est réel puisque $r(s)$ est évidemment réel pour s réel > 1,

$$r(1) = - \sum_{p\in P} [\log \frac{1}{1 - 1/p} - \frac{1}{p}] .$$

La formule (12) va nous permettre d'évaluer la somme $\sum_{n\leqslant x} \omega(n)$.

Pour cela, définissons d'abord des nombres $\alpha_j^{(q)}$ pour $1 \leqslant j \leqslant q$ par

$$(e^z - 1)^j = \sum_{q=j}^{+\infty} \frac{\alpha_j^{(q)}}{q!} z^q .$$

Si l'on convient que $\binom{m}{j} = 0$ pour $j > m$, on peut écrire pour q et $m \geqslant 1$

$$e^{mz} = [(e^z - 1) + 1]^m = 1 + \sum_{j=1}^{q} \binom{m}{j} (e^z - 1)^j$$

---

(6) On établit en effet l'existence de la fonction $\mathcal{K}(s , z)$ en observant que la fonction définie par cette formule est bien holomorphe pour $s \in \Delta$ et z quelconque et qu'elle satisfait pour $\Re s > 1$ et $|z| \leqslant 1$ à

$$\mathcal{K}(s , z) \exp[z \log \frac{1}{s - 1}] = \prod_{p\in P} [1 + \frac{z}{p^s}] = \sum_{n\in Q} \frac{z^{\omega(n)}}{n^s} .$$

et, en égalant les coefficients de z^q dans les développements en série des membres extrêmes, on obtient

$$m^q = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j^{(q)} \binom{m}{j} .$$

Il résulte de là que, si $q \geqslant 1$, on a, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\omega(n)^q = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j^{(q)} \times \text{nombre des systèmes de } j \text{ diviseurs premiers de } n$$

$$= \sum_{j=1}^{q} \alpha_j^{(q)} \times \text{nombre des produits de } j \text{ nombres premiers différents qui divisent } n .$$

Si l'on considère les $n \leqslant x$, les produits de nombres premiers qui interviennent sont $\leqslant x$. Le produit $p_1 p_2 \cdots p_j$, où $p_1 < p_2 < \cdots < p_j$, divise exactement $E[\frac{x}{p_1 p_2 \cdots p_j}]$ entiers $\geqslant 1$ et $\leqslant x$, $E[u]$ désignant la partie entière de u.

On a donc pour $q \geqslant 1$

$$\sum_{n \leqslant x} \omega(n)^q = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j^{(q)} \sum_{\substack{p_1, p_2, \cdots, p_j \in P \\ p_1 < p_2 < \cdots < p_j \\ p_1 p_2 \cdots p_j \leqslant x}} E[\frac{x}{p_1 p_2 \cdots p_j}]$$

$$= x \sum_{j=1}^{q} \alpha_j^{(q)} \Pi_j(x) + O[\frac{x(\log\log x)^{q-1}}{\log x}] .$$

puisque le nombre des systèmes de j nombres premiers $p_1, p_2, \cdots, p_j$ tels que $p_1 < p_2 < \cdots < p_j$ et $p_1 p_2 \cdots p_j \leqslant x$, c'est-à-dire le nombre des n "quadratfrei" $\leqslant x$ et tels que $\omega(n) = j$ est, comme on l'a vu, équivalent pour x infini à $\frac{x(\log\log x)^{q-1}}{(j-1)!\log x}$.

En remplaçant maintenant $\Pi_j(x)$ par son expression déduite de la formule (12), on obtient

$$\sum_{n \leqslant x} \omega(n)^q = x \sum_{j=1}^{q} \alpha_j^{(q)} \sum_{h=0}^{j} \frac{\beta_h}{(j-h)!} (\log\log x)^{j-h} + O[\frac{x(\log\log x)^{q-1}}{\log x}] .$$

Comme $\sum_{h=0}^{j} \frac{\beta_h}{(j-h)!} (\log\log x)^{j-h}$ est le coefficient de Z^j dans le développement en série entière en Z de $F(Z) \exp[Z \log\log x]$, et $\alpha_j^{(q)}$ le coefficient de z^q dans le développement en série entière en z de $(e^z - 1)^j$ multiplié par $q!$, on voit que la formule s'écrit $\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} \omega(n)^q = q!$ coefficient de z^q dans

$$F(e^z - 1)\exp[(e^z - 1)\log\log x] + O\left[\frac{(\log\log x)^{q-1}}{\log x}\right].$$

Le terme constant dans $F(e^z - 1)\exp[(e^z - 1)\log\log x]$ étant $F(0) = 1$, la formule vaut encore pour $q = 0$.

Ceci étant, on peut évaluer la somme $\sum_{n\leq x}[\omega(n) - \log\log x]^q$. On a

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}[\omega(n) - \log\log x]^q = \sum_{j=0}^{q}(-1)^j\binom{q}{j}(\log\log x)^j\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\omega(n)^{q-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{q}\frac{(-1)^j\, q!}{j!}(\log\log x)^j \quad \text{coefficient de } z^{q-j} \text{ dans}$$

$$F(e^z - 1)\exp[(e^z - 1)\log\log x] + O\left[\frac{(\log\log x)^{q-1}}{\log x}\right].$$

Ceci s'écrit finalement

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}[\omega(n) - \log\log x]^q = q! \quad \text{coefficient de } z^q \text{ dans}$$

$$F(e^z - 1)\exp[(e^z - z - 1)\log\log x] + O\left[\frac{(\log\log x)^{q-1}}{\log x}\right].$$

Le coefficient de z^q dans le développement en série entière de

$$F(e^z - 1)\exp[(e^z - z - 1)\log\log x]$$

est un polynôme en $\log\log x$ de degré $\leq q/2$.

Si $q = 2m$, on voit que le terme de degré m dans ce polynôme est

$$(\log\log x)^m \times \text{coefficient de } z^{2m} \text{ dans } e^{z^2/2}.$$

Si donc on pose

$$e^{z^2/2} = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\mu_j}{j!}z^j,$$

on voit que, pour tout $q \geq 0$,

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}[\omega(n) - \log\log x]^q = \mu_q(\log\log x)^{q/2} + O[(\log\log x)^{(q-1)/2}].$$