Hubert Delange

Sur certaines fonctions arithmétiques additives

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 2 (1960-1961), exp. n° 6, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1960-1961__2__A6_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
2e année, 1960/61, n° 6

23 et 30 janvier 1961

SUR CERTAINES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES ADDITIVES

par Hubert DELANGE

Au cours d'un exposé précédent, j'ai indiqué des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction arithmétique réelle additive possède une loi de distribution.

Je vais considérer maintenant un cas où ces conditions ne sont pas satisfaites, mais où on a encore un résultat intéressant.

Il s'agit d'un théorème dû à ERDÖS et KAĆ [5].

Ces auteurs se bornent - tout en remarquant à juste titre que ce n'est pas essentiel - au cas d'une fonction <u>fortement additive</u>, c'est-à-dire additive, et satisfaisant à

$$f(p^k) = f(p) \quad \text{quels que soient } p \text{ premier et } k \text{ entier} > 1 \quad .$$

Si f est une fonction fortement additive, on a

$$f(n) = \sum_{p/n} f(p) \quad (^1) \quad .$$

Le théorème est le suivant :

<u>Soit</u> f <u>une fonction arithmétique réelle fortement additive telle que</u>

$$|f(p)| \leqslant M \quad \underline{\text{quel que soit}} \quad p \text{ , } \underline{\text{et}} \quad \sum \frac{f(p)^2}{p} = +\infty \quad .$$

<u>Posons</u>

$$A(x) = \sum_{p \leqslant x} \frac{f(p)}{p} \quad \underline{\text{et}} \quad B(x) = \left\{ \sum_{p \leqslant x} \frac{f(p)^2}{p} \right\}^{1/2} \quad .$$

(De sorte que $B(x)$ tend vers $+\infty$ avec x).

<u>Soit</u> $N(x , t)$ <u>le nombre des</u> $n \leqslant x$ <u>tels que</u>

$$f(n) \leqslant A(x) + t\,B(x) \quad .$$

---

(1) Dans tout cet exposé, la lettre p est employée comme symbole générique d'un nombre premier.

Alors, quand x tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{x} N(x\,,\,t) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\,du \quad .$$

La démonstration d'ERDÖS et KAĆ utilise le théorème classique sur la distribution limite d'une somme de variables aléatoires dont le nombre augmente indéfiniment, et un lemme qui s'obtient par la méthode du crible de Viggo-Brun.

Je donnerai ici une démonstration entièrement différente.

1. - D'après un théorème bien connu du calcul des probabilités, que j'ai déjà utilisé pour traiter la question rappelée au début, le résultat à établir est équivalent au suivant :

Si $\sigma_x(t) = \frac{1}{x} N(x\,,\,t)$ et $\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\,du$, pour tout **t réel, quand** x tend vers $+\infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu}\,d\sigma_x(u) \to \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu}\,d\sigma(u) = e^{-t^2/2} \quad .$$

1.1. - On voit ensuite que, pour qu'il en soit ainsi, il suffit que, pour chaque q entier $\geqslant 0$, quand x tend vers $+\infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^q\,d\sigma_x(u) \to \mu_q \quad ,$$

où $\mu_0\,,\,\mu_1\,,\,\mu_2\,,\,\ldots$ sont déterminés par $e^{z^2/2} = \sum_0^{+\infty} \frac{\mu_j}{j!} z^j$ (2) .

---

(2) On peut noter que $\mu_q = \int_{-\infty}^{+\infty} u^q\,d\sigma(u)$ car, pour t réel fixé, l'égalité

$$e^{iut}\,\sigma'(u) = \sum_0^{+\infty} \frac{(iut)^j}{j!}\,\sigma'(u)$$

peut être intégrée terme à terme de $-\infty$ à $+\infty$, ce qui donne

$$e^{-t^2/2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iut}\,d\sigma(u) = \sum_0^{+\infty} \frac{(it)^j}{j!} \int_{-\infty}^{+\infty} u^j\,d\sigma(u) \quad .$$

En effet, pour t réel fixé, on a, quel que soit $m > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu}\, d\sigma_x(u) - e^{-t^2/2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu}\, d\sigma_x(u) - \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\mu_j}{j!}(it)^j$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{itu} - \sum_{j=0}^{m} \frac{(itu)^j}{j!}\right] d\sigma_x(u) + \sum_{j=0}^{m} \frac{(it)^j}{j!}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} u^j\, d\sigma_x(u) - \mu_j\right] - \sum_{j=m+1}^{+\infty} \frac{\mu_j}{j!}(it)^j .$$

En tenant compte de ce que, quels que soient x réel et m entier $\geqslant 0$,

$$\left|e^{ix} - \sum_{j=0}^{m} \frac{(ix)^j}{j!}\right| \leqslant \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} ,$$

ce qui s'établit aisément par récurrence sur m, on voit que, pour tout $m > 0$ impair,

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu}\, d\sigma_x(u) - e^{-t^2/2}\right|$$

$$\leqslant \frac{|t|^{m+1}}{(m+1)!}\int_{-\infty}^{+\infty} u^{m+1}\, d\sigma_x(u) + \sum_{j=0}^{m} \frac{|t|^j}{j!}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} u^j\, d\sigma_x(u) - \mu_j\right| + \sum_{j=m+1}^{+\infty} \frac{\mu_j}{j!}|t|^j .$$

Si le résultat indiqué est établi, on en déduit que

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu}\, d\sigma_x(u) - e^{-t^2/2}\right| \leqslant \frac{\mu_{m+1}}{(m+1)!}|t|^{m+1} + \sum_{j=m+1}^{+\infty} \frac{\mu_j}{j!}|t|^j .$$

Mais le second membre tend vers zéro quand m tend vers $+\infty$.

1.2. - Remarquons maintenant que l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^q\, d\sigma_x(u) = \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\left[\frac{f(n) - A(x)}{B(x)}\right]^q ,$$

$$= \frac{1}{x\, B(x)^q}\sum_{n\leqslant x}[f(n) - A(x)]^q .$$

On est donc ramené à démontrer que, pour chaque q entier $\geqslant 0$, quand x tend vers $+\infty$,

$$\sum_{n\leqslant x}[f(n) - A(x)]^q = \mu_q\, x\, B(x)^q + o[x\, B(x)^q] .$$

Il suffit d'ailleurs de considérer le cas où $q > 0$, car le résultat est évident pour $q = 0$, puisque $\mu_0 = 1$.

1.3. - Ainsi le théorème d'Erdös et Kac est une conséquence du suivant, dû à H. HALBERSTAM [6] :

<u>Si</u> f <u>est une fonction réelle fortement additive, telle que</u> $|f(p)| \leqslant M$ <u>quel que soit</u> p <u>et</u> $\sum \frac{f(p)^2}{p} = +\infty$, <u>et si</u>

$$A(x) = \sum_{p\leqslant x} \frac{f(p)}{p} \quad \text{et} \quad B(x) = \left\{ \sum_{p\leqslant x} \frac{f(p)^2}{p} \right\}^{1/2} ,$$

<u>pour chaque</u> q <u>entier</u> > 0 , <u>on a, quand</u> x <u>tend vers</u> $+\infty$,

$$\sum_{n\leqslant x} [f(n) - A(x)]^q = \mu_q \, x \, B(x)^q + o[x \, B(x)^q] ,$$

<u>où les nombres</u> μ_0 , μ_1 , μ_2 , ... <u>sont ceux qui ont été indiqués plus haut.</u>

J'avais d'abord établi [1] ce résultat dans le cas particulier où $f(n)$ est le nombre des diviseurs premiers de n . J'utilisais pour cela le fait que la fonction $\zeta(s)$ ne s'annule pas pour $\Re s = 1$, et un théorème taubérien approprié. HALBERSTAM a ensuite démontré, de façon élémentaire, le théorème général. Puis j'ai donné [2] une démonstration plus simple, qui est, à peu de chose près, celle que je vais exposer ici.

2. - Je modifierai d'abord un peu les notations, en posant, pour j entier > 0 ,

$$A_j(x) = \sum_{p\leqslant x} \frac{f(p)^j}{p} .$$

Ainsi, le résultat à établir s'écrira

$$(1) \qquad \sum_{n\leqslant x} [f(n) - A_1(x)]^q = \mu_q \, x \, A_2(x)^{q/2} + o[x \, A_2(x)^{q/2}] .$$

D'autre part, je poserai, pour $y > 0$,

$$f_y(n) = \sum_{\substack{p/n \\ p\leqslant y}} f(n) .$$

2.1. - On va voir que, pour établir (1), il suffit de montrer que, si $y = x^{1/N}$, pour chaque $q < N$, on a, quand x tend vers $+\infty$

$$(2) \qquad \sum_{n\leq x} [f_y(n) - A_1(y)]^q = \mu_q \, x \, A_2(y)^{q/2} + o[x \, A_2(y)^{q/2}] \quad .$$

Je poserai, pour x et $y > 0$,

$$f(n) - A_1(x) = [f_y(n) - A_1(y)] + \delta(x, y, n) \quad ,$$

de sorte que $\delta(x, y, n) = [f(n) - f_y(n)] - [A_1(x) - A_1(y)]$.

2.1.1. - On voit d'abord que, si $1 < y < x$ et $n \leqslant x$, on a

$$(3) \qquad |\delta(x, y, n)| \leqslant 3M \frac{\log x}{\log y} \quad .$$

On a en premier lieu $f(n) - f_y(n) = \sum_{\substack{p/n \\ p>y}} f(p)$, et, comme chaque terme de la somme est de module $\leqslant M$, et le nombre des termes est $\leqslant \frac{\log x}{\log y}$, on voit que

$$|f(n) - f_y(n)| \leqslant M \frac{\log x}{\log y} \quad .$$

D'autre part, $A_1(x) - A_1(y) = \sum_{y<p\leqslant x} \frac{f(p)}{p}$, et par suite

$$|A_1(x) - A_1(y)| \leqslant M \sum_{y<p\leqslant x} \frac{1}{p} \quad .$$

Mais

$$\sum_{y<p\leqslant x} \frac{1}{p} \leqslant 2 \frac{\log x}{\log y} \quad .$$

En effet

$$\sum_{n\leqslant x} \log n \geqslant \sum_{p\leqslant x} \frac{x}{2p} \log p \quad ,$$

car le premier membre est le logarithme du produit des n positifs $\leqslant x$, et, dans ce produit, chaque $p \leqslant x$ figure avec un exposant au moins égal à la partie entière de $\frac{x}{p}$ (nombre de multiples de p au plus égaux à x), donc $> \frac{x}{2p}$ [3].

---

[3] Quand $u \geqslant 1$, on a $u <$ partie entière de $u + 1 \leqslant 2 \times$ partie entière de u, donc partie entière de $u \geqslant \frac{u}{2}$.

On peut donc écrire

$$\sum_{n\leq x} \log n \geq \sum_{y<p\leq x} \frac{x}{2p} \log p \geq \frac{x}{2} \log y \sum_{y<p\leq x} \frac{1}{p} \quad .$$

Par ailleurs,

$$\sum_{n\leq x} \log n \leq x \log x \quad .$$

2.1.2. - Ceci dit, soit q un entier >0.

Prenons l'entier $N \geq 2q$ et supposons $x>1$ et $y = x^{1/N}$.

On a, pour chaque $n \leq x$,

$$[f(n) - A_1(x)]^q = [f_y(n) - A_1(y)]^q + \sum_{h=1}^{q} C_q^h [f_y(n) - A_1(y)]^{q-h} \delta(x , y , n)^h \quad .$$

Par suite,

$$\sum_{n\leq x} [f(n) - A_1(x)]^q$$

$$= \sum_{n\leq x} [f_y(n) - A_1(y)]^q + \sum_{h=1}^{q} C_q^h \sum_{n\leq x} [f_y(n) - A_1(y)]^{q-h} \delta(x , y , n)^h \; .$$

Si (2) est supposé établi, la première somme du second membre est égale, pour x tendant vers $+\infty$, à

$$\mu_q \, x \, A_2(y)^{q/2} + o[x \, A_2(y)^{q/2}] \quad .$$

De plus, comme, d'après (3), on a pour $n \leq x$

$$|\delta(x , y , n)| \leq 3 \, MN \quad ,$$

on voit que, pour chaque $h \geq 1$ et $\leq q$,

$$\left|\sum_{n\leq x} [f_y(n) - A_1(y)]^{q-h} \delta(x , y , n)^h\right| \leq (3 \, MN)^h \sum_{n\leq x} |f_y(n) - A_1(y)|^{q-h} \quad ,$$

d'où, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz ,

$$\left|\sum_{n\leq x}[f_y(n) - A_1(y)]^{q-h}\,\delta(x, y, n)^h\right|$$

$$\leq (3\ MN)^h\, x^{1/2}\left\{\sum_{n\leq x}[f_y(n) - A_1(y)]^{2q-2h}\right\}^{1/2}$$

$$\leq (3\ MN)^h\, x^{1/2}\, O[x^{1/2}\, A_2(y)^{(q-h)/2}] = o[x\, A_2(y)^{q/2}] \quad .$$

On obtient donc

$$\sum_{n\leq x}[f(n) - A_1(x)]^q = \mu_q\, x\, A_2(y)^{q/2} + o[x\, A_2(y)^{q/2}] \quad .$$

Ceci est équivalent à (1), car on a, pour x infini,

$$A_2(y) \sim A_2(x) \quad .$$

En effet,

$$A_2(x) - A_2(y) = \sum_{y<p\leq x}\frac{f(p)^2}{p} \quad ,$$

et par suite

$$0 \leq A_2(x) - A_2(y) \leq M^2 \sum_{y<p\leq x}\frac{1}{p} \leq 2\ M^2\,\frac{\log x}{\log y} = 2\ NM^2 \ .$$

3. Démonstration de (2).

Nous désignerons par $\varpi(x)$ le nombre des nombres premiers au plus égaux à x et par $\nu_y(n)$ le nombre des diviseurs premiers de n au plus égaux à y .

De plus, nous poserons

$$M(x) = \sum_{p\leq x}|f(p)|$$

et, pour x et $y > 0$ et q entier ≥ 0 ,

$$F_q(x , y) = \sum_{n\leq x} f_y(n)^q \quad .$$

3.1. - Donnons-nous un q entier ≥ 1 .

Si $\nu_y(n) = 0$, on a $f_y(n) = 0$ et par suite $f_y(n)^q = 0$.

Si $\nu_y(n) > 0$, on a

$$f_y(n)^q = \sum_{\substack{r \leqslant \nu_y(n) \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r > 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = q}} \sum_{\substack{p_1, p_2, \ldots, p_r / n \\ p_1 < p_2 < \ldots < p_r < y}} \frac{q!}{\alpha_1 ! \alpha_2 ! \ldots \alpha_r !} f(p_1)^{\alpha_1} f(p_2)^{\alpha_2} \ldots f(p_r)^{\alpha_r} .$$

y étant fixé $\geqslant 2$, tous les termes de la somme sont de la forme

$$\frac{q!}{\alpha_1 ! \alpha_2 ! \ldots \alpha_r !} f(p_1)^{\alpha_1} f(p_2)^{\alpha_2} \ldots f(p_r)^{\alpha_r} ,$$

où $r \leqslant \varpi(y)$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = q$ et $p_1 < p_2 < \ldots < p_r < y$.

Inversement, tout terme de cette forme figure dans l'expression de $f_y(n)^q$ pour toutes les valeurs de n divisibles par $p_1 \; p_2 , \ldots , p_r$.

On a donc, pour x et $y \geqslant 2$;

$$F_q(x , y) =$$

$$\sum_{\substack{r \leqslant \varpi(y) \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r > 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = q}} \sum_{p_1 < p_2 < \ldots < p_r < y} \frac{q!}{\alpha_1 ! \alpha_2 ! \ldots \alpha_r !} f(p_1)^{\alpha_1} f(p_2)^{\alpha_2} \ldots f(p_r)^{\alpha_1} E\left[\frac{x}{p_1 p_2 \ldots p_r}\right] ,$$

où $E[\;]$ désigne la partie entière de la quantité entre crochets.

En remplaçant dans chaque terme $E\left[\frac{x}{p_1 p_2 \ldots p_r}\right]$ par $\frac{x}{p_1 p_2 \ldots p_r}$, on commet sur ce terme une erreur de module au plus égal à

$$\frac{q!}{\alpha_1 ! \alpha_2 ! \ldots \alpha_r !} |f(p_1)|^{\alpha_1} |f(p_2)|^{\alpha_2} \ldots |f(p_r)|^{\alpha_r} .$$

L'erreur totale ainsi commise est donc de module au plus égal à $M(y)^q$.

On voit ainsi que, pour x et $y \geqslant 2$,

$$F_q(x\,,\,y) =$$

$$\sum_{\substack{r\leqslant\varpi(y)\\ \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r>0\\ \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_r=q}} \sum_{p_1<p_2<\dots<p_r<y} \frac{q!\,x}{\alpha_1!\alpha_2!\dots\alpha_r!} \cdot \frac{f(p_1)^{\alpha_1}\,f(p_2)^{\alpha_2}\dots f(p_r)^{\alpha_r}}{p_1p_2\dots p_r}$$

$$+\,\theta_q(x\,,\,y)\;M(y)^q \qquad ,$$

avec $|\theta_q(x\,,\,y)|\leqslant 1$.

On reconnaît dans la somme au second membre le produit par $q!\,x$ du coefficient de z^q dans le développement en série entière de la fonction entière

$$G_y(z) = \prod_{p\leqslant y}\left[1+\frac{e^{zf(p)}-1}{p}\right] \qquad .$$

Nous poserons donc

$$G_y(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j(y)\;z^j \qquad .$$

On peut alors énoncer le résultat suivant :

Si x et $y\geqslant 2$, on a, pour chaque q entier $\geqslant 0$,

(4) $\qquad F_q(x\,,\,y) = q!\,x\,a_q(y) + \theta_q(x\,,\,y)\;M(y)^q$, avec $|\theta_q(x\,,\,y)|\leqslant 1$.

Pour $q\geqslant 1$, cela résulte de ce qui précède, et c'est vrai aussi pour $q=0$ puisque

$$a_o(y) = 1 \quad \text{et} \quad F_o(x\,;\,y) = E[x] \qquad .$$

3.2. - Maintenant, étant donnés x et $y\geqslant 2$ et q entier $\geqslant 1$, on peut écrire pour chaque $n\leqslant x$

$$[f_y(n) - A_1(y)]^q = \sum_{h=0}^{q} (-1)^h\,C_q^h\,A_1(y)^h\,f_y(n)^{q-h} \qquad ,$$

et il en résulte que

$$\sum_{n\leqslant x} [f_y(n) - A_1(y)]^q = \sum_{h=0}^{q} (-1)^h\,C_q^h\,A_1(y)^h\,F_{q-h}(x\,,\,y) \qquad .$$

En tenant compte de (4), on obtient

$$\sum_{n\leq x} [f_y(n) - A_1(y)]^q = \sum_{h=0}^{q} (-1)^h C_q^h A_1(y)^h [(q-h)!\, x a_{q-h}(y)]$$

$$+ \sum_{h=0}^{q} (-1)^h C_q^h A_1(y)^h \theta_{q-h}(x, y) M(y)^{q-h} ,$$

$$= q!\, x \sum_{h=0}^{q} \frac{(-1)^h A_1(y)^h}{h!} a_{q-h}(y) + \sum_{h=0}^{q} (-1)^h C_q^h A_1(y)^h \theta_{q-h}(x, y) M(y)^{q-h} .$$

Mais $\sum_{h=0}^{q} \frac{(-1)^h A_1(y)^h}{h!} a_{q-h}(y)$ est le coefficient de z^q dans le développement en série entière de

$$G_y(z) \exp[-A_1(y) z]$$

et l'on a par ailleurs

$$\left| \sum_{h=0}^{q} (-1)^h C_q^h A_1(y)^h \theta_{q-h}(x, y) M(y)^{q-h} \right| \leq [M(y) + |A_1(y)|]^q \leq 2^q M(y)^q ,$$

puisque $|A_1(y)| \leq M(y)$.

Par suite, si l'on pose

$$G_y(z) \exp[-A_1(y) z] = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j(y) z^j ,$$

on a le résultat suivant :

Si x et $y \geq 2$, on a pour chaque q entier ≥ 1

$$\sum_{n\leq x} [f_y(n) - A_1(y)]^q = q!\, x\, b_q(y) + 2^q \theta_q^*(x, y) M(y)^q ,$$

avec $|\theta_q^*(x, y)| \leq 1$.

3.2.1. - Si maintenant on suppose que $y = x^{1/N}$ et $q \leq N$, on a

$$M(y)^q \leq M^q y^q \leq M^q x .$$

On voit donc que la démonstration de (2) se ramène à établir que, lorsque y tend vers $+\infty$, pour chaque q entier $\geqslant 1$,

(5) $$b_q(y) = \frac{\mu_q}{q!} A_2(y)^{q/2} + o[A_2(y)^{q/2}] \quad .$$

3.3. - J'introduirai la fonction entière

$$H_y(z) = \prod_{p\leqslant y} \left[1 + \frac{e^{zf(p)} - 1}{p}\right] \exp\left[- \frac{e^{zf(p)} - 1}{p}\right]$$

et je poserai

$$H_y(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j(y)\, z^j \quad .$$

On a $c_0(y) = 1$, puisque $H_y(0) = 1$.

3.3.1. - Une théorie semblable à celle des produits de Weierstrass montre que le produit infini

$$\prod \left[1 + \frac{e^{zf(p)} - 1}{p}\right] \exp\left[- \frac{e^{zf(p)} - 1}{p}\right]$$

est uniformément convergent sur tout ensemble compact.

Il est donc égal à une fonction entière

$$H(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} C_j\, z^j \quad .$$

Quand y tend vers $+\infty$, $H_y(z)$ converge uniformément sur tout ensemble compact vers $H(z)$ et, pour chaque j , $c_j(y)$ tend vers C_j .

3.3.2. - On voit que

$$\begin{aligned} G_y(z) \exp[- A_1(y)\, z] &= H_y(z) \exp\left\{\sum_{p\leqslant y} \frac{e^{zf(p)} - 1}{p} - A_1(y)\, z\right\} , \\ &= H_y(z) \exp\left\{\sum_{j=2}^{+\infty} \frac{A_j(y)}{j!} z^j\right\} , \end{aligned}$$

ce qui s'écrit

$$(6)\quad \sum_{j=0}^{+\infty} b_j(y)\ z^j = \left\{\sum_{j=0}^{+\infty} c_j(y)\ z^j\right\} \exp\left\{\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{A_k(y)}{k!}\ z^k\right\} \quad .$$

Par suite, $b_q(y)$ est un polynôme en $c_0(y)$, $c_1(y)$, $c_2(y)$, ... et $A_2(y)$, $A_3(y)$, ... , linéaire par rapport aux $c_j(y)$.

J'écrirai, en abrégé,

$$b_q(y) = P_q[c_j(y)\ ;\ A_k(y)] \quad .$$

Si on change z en λz dans (6), le coefficient de z^q dans le premier membre devient $\lambda^q\ b_q(y) = \lambda^q\ P_q[c_j(y)\ ;\ A_k(y)]$ et dans le second

$$P_q[\lambda^j\ c_j(y)\ ;\ \lambda^k\ A_k(y)] \quad .$$

On a donc l'identité

$$P_q[\lambda^j\ c_j(y)\ ;\ \lambda^k\ A_k(y)] = \lambda^q\ P_q[c_j(y)\ ;\ A_k(y)] \quad ,$$

ce qui prouve que $P_q[c_j(y)\ ;\ A_k(y)]$ est une somme de termes de la forme

$$\text{Cte} \times c_j(y)\ A_2(y)^{\alpha_2}\ A_3(y)^{\alpha_3} \ldots\ , \text{ où } j + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots = q \quad .$$

Comme, pour $k \geqslant 2$,

$$|A_k(y)| \leqslant \sum_{p\leq y} \frac{|f(p)|^k}{p} \leqslant M^{k-2} \sum_{p\leq y} \frac{f(p)^2}{p} = M^{k-2}\ A_2(y) \quad ,$$

on a, quand y tend vers $+\infty$,

$$c_j(y)\ A_2(y)^{\alpha_2}\ A_3(y)^{\alpha_3} \ldots = O[A_2(y)^{\alpha_2+\alpha_3+\ldots}] \quad .$$

Mais $\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots = \frac{1}{2}[q - j - \alpha_3 - 2\alpha_4 - \ldots]$.

Par suite, tous les termes de $P_q[c_j(y)\ ;\ A_k(y)]$ où figure au moins un $c_j(y)$ d'indice > 0 ou un $A_k(y)$ d'indice > 2 sont $o[A_2(y)^{q/2}]$.

On a donc

$P_q[c_j(y)\ ;\ A_k(y)] = o[A_2(y)^{q/2}]$ + ce que l'on obtient en remplaçant $c_1(y)$, $c_2(y)$, ... et $A_3(y)$, $A_4(y)$, ... par 0 .

On voit sur (6) qu'en remplaçant dans $P_q[c_j(y)\ ;\ A_k(y)]$ $c_1(y)$, $c_2(y)$, ... et $A_3(y)$, $A_4(y)$, ... par 0 , on obtient le coefficient de z^q dans $\exp[\frac{A_2(y)}{2} z^2]$, c'est-à-dire $\frac{\mu_q}{q!} A_2(y)^{q/2}$.

On a donc bien (5).

4. Remarques.

1° On peut montrer [2] que l'hypothèse $|f(p)| \leqslant M$ peut être remplacée par

$$f(p) = o[B(p)] \quad \text{quand} \quad p \quad \text{tend vers} \quad +\infty \quad .$$

2° Au lieu de $N(x\ ,\ t)$ = nombre des $n \leqslant x$ tels que

$$f(n) \leqslant A(x) + t\,B(x) \quad ,$$

on pourrait considérer, dans le théorème d'Erdös et Kać, $N'(x\ ,\ t)$ = nombre des $n \leqslant x$ tels que

$$f(n) < A(n) + t\,B(n) \quad .$$

Le résultat s'exprimerait en disant que l'ensemble des n satisfaisant à cette condition possède une densité égale à

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\, du \quad ,$$

autrement dit, que la fonction arithmétique égale à

$$\frac{f(n) - A(n)}{B(n)} \quad ,$$

définie pour $n \geqslant n_o$, où n_o est le plus petit n tel que $B(n) > 0$, possède une loi de distribution, qui est la loi normale de Gauss.

On montrerait d'ailleurs [2] que, pour x infini,

$$\sum_{p_o \leqslant n \leqslant x} \left[\frac{f(n) - A(n)}{B(n)}\right]^q = \mu_q\, x + o[x] \quad .$$

3° Tout reste valable si on remplace $A(x)$ et $B(x)$ par $A^*(x)$ et $B^*(x)$ tels que, pour x infini,

$$A^*(x) - A(x) = o[B(x)] \quad \text{et} \quad B^*(x) \sim B(x) \quad .$$

Par exemple, pour $f(n) = \omega(n)$, nombre des diviseurs premiers de n , on a

$$A(x) = \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \log\log x + O[1]$$

et $B(x) = A(x)^{1/2} \sim \sqrt{\log\log x}$.

On peut donc dire que, quand x tend vers $+\infty$, le quotient par x du nombre des $n \leqslant x$ tels que

$$\omega(n) \leqslant \log\log x + t\sqrt{\log\log x}$$

tend vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\, du$, ou bien que la fonction

$$\frac{\omega(n) - \log\log n}{\sqrt{\log\log n}}$$

possède une loi de distribution qui est la loi de Gauss, et que l'on a pour x infini

$$\sum_{n \leqslant x} [\omega(n) - \log\log x]^q = \mu_q\, x(\log\log x)^{q/2} + o[x(\log\log x)^{q/2}]$$

et

$$\sum_{3 \leqslant n \leqslant x} \left[\frac{\omega(n) - \log\log n}{\sqrt{\log\log n}}\right]^q = \mu_q\, x + o[x] \quad .$$

5. Généralisations.

5.1. - Soit f une fonction arithmétique satisfaisant aux hypothèses du théorème d'Erdös et Kac, éventuellement élargies comme il a été dit dans la remarque 1° ci-dessus, et soit E un ensemble d'entiers naturels possèdant une densité positive $D(E)$.

Désignons par $N_E(x, t)$ le nombre des $n \leqslant x$ appartenant à E et tels que

$$f(n) \leqslant A(x) + t\, B(x) \quad ,$$

et par $N'_E(x, t)$ le nombre des $n \leqslant x$ appartenant à E et tels que

$$f(n) \leqslant A(n) + t\, B(n) \quad .$$

Si E est convenablement choisi, on a les résultats suivants [3] :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} N_E(x\ ,\ t) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} N_E^!(x\ ,\ t) = D(E)\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\ du \quad .$$

De plus, quand x tend vers $+\infty$,

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in E}} [f(n) - A(x)]^q = D(E)\ \mu_q\ x\ B(x)^q + o[x\ B(x)^q]$$

et

$$\sum_{\substack{n_0\leqslant n\leqslant x\\ n\in E}} \left[\frac{f(n) - A(n)}{B(n)}\right]^q = D(E)\ \mu_q\ x + o[x] \quad .$$

On peut d'ailleurs remplacer partout $A(x)$ et $B(x)$ par $A^*(x)$ et $B^*(x)$ dans les mêmes conditions que plus haut.

Ces résultats sont valables, par exemple, si E est l'un des ensembles suivants :

1. Ensemble des n tels que $n \equiv \ell \pmod k$;

2. Ensemble des n "quadratfrei" tels que $n \equiv \ell \pmod k$ (avec $(k\ ,\ \ell)$ quadratfrei) ;

3. Ensemble des n tels que

$$n \equiv \ell \pmod k \quad \text{et} \quad \omega(n) \equiv r \pmod q$$

4. Ensemble des n quadratfrei tels que

$$n \equiv \ell \pmod k \quad (\text{avec } (k\ ,\ \ell) \text{ quadratfrei}) \text{ et } \omega(n) \equiv r \pmod q \quad .$$

5.2. - On peut aussi [4] obtenir des théorèmes faisant intervenir simultanément plusieurs fonctions satisfaisant aux hypothèses du théorème d'Erdös et Kac, élargies comme il a été dit plus haut.

6. Cas particulier de la fonction $\omega(n)$.

On comprend que, pour des fonctions particulières, il soit possible d'obtenir des résultats plus précis que celui d'Erdös et Kac.

Ainsi, soit $N_0(x\ ,\ t)$ le nombre des $n \leqslant x$ tels que

$$\omega(n) \leqslant \log\log x + t\sqrt{\log\log x} \quad .$$

Il avait été conjecturé par LEVÊQUE [7] que, quand x tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{x} N_o(x\ ,\ t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\, du + O\left[\frac{1}{\sqrt{\log\log x}}\right] \quad ,$$

le O étant uniforme par rapport à t.

Ce résultat a été démontré en 1958 par RÉNYI et TURÁN [8]. J'ai établi récemment le résultat plus précis suivant, non encore publié :

Il existe une suite de fonctions $\varphi_1(t\ ,\ x)$, $\varphi_2(t\ ,\ x)$, ... , $\varphi_r(t\ ,\ x)$, ... , dont chacune est bornée pour $x > e$ et t quelconque, telles que, quel que soit l'entier $\nu \geqslant 1$, on ait pour x infini

$$\frac{1}{x} N_o(x\ ,\ t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\, du + \sum_{r=1}^{\nu} \frac{\varphi_r(t\ ,\ x)}{(\sqrt{\log\log x})^r} + O\left[\frac{1}{(\sqrt{\log\log x})^{\nu+1}}\right] \quad ,$$

et ceci uniformément par rapport à t.

Les fonctions $\varphi_r(t\ ,\ x)$ ne sont pas déterminées de façon unique.

On peut obtenir une suite convenable avec $\varphi_r(t\ ,\ x)$ de la forme

$$\varphi_r(t\ ,\ x) = e^{-t^2/2}\left[P_{r,o}(t) + \sum_{h=1}^{r} P_{r,h}(t)\ \langle \log\log x + t\sqrt{\log\log x}\rangle^h\right] \quad ,$$

où $\langle u\rangle$ désigne l'excès de u sur sa partie entière et $P_{r,h}(t)$ est un polynôme en t de degré $3r - 2h - 1$ et de même parité que $r - 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DELANGE (Hubert). - Sur le nombre des diviseurs premiers de n , C. R. Acad. Sc. Paris, t. 237, 1953, p. 542-544.

[2] DELANGE (Hubert). - Sur un théorème d'Erdös et Kac, Bull. Acad. royale Belg., Cl. Sc., t. 42, 1956, p. 130-144.

[3] DELANGE (Hubert). - Sur les fonctions arithmétiques fortement additives, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 244, 1957, p. 1307-1309.

[4] DELANGE (Hubert). - Sur les fonctions arithmétiques fortement additives, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 244, 1957, p. 1604-1606.

[5] ERDÖS (P.) and KAC (M.). - The Gaussian law of errors in the theory of additive number theoretic functions, Amer. J. of Math., t. 62, 1940, p. 738-742.

[6] HALBERSTAM (H.). - On the distribution of additive number-theoretic functions, J. London math. Soc., t. 30, 1955, p. 43-53.

[7] LEVÊQUE (W. J.). - On the size of certain number-theoretic functions, Trans. Amer. math. Soc., t. 66, 1949, p. 440-463.

[8] RÉNYI (A.) and TURÁN (P.). - On a theorem of Erdös-Kać, Acta Arithmetica, t. 4, 1958, p. 71-84.