

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

GÉRARD RAUZY

Les séries I et le théorème de Dirichlet

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 2 (1960-1961), exp. n° 4, p. 1-9

[<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1960-1961__2__A4_0>](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1960-1961__2__A4_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES SÉRIES L ET LE THÉOREME DE DIRICHLET

par Gérard RAUZY

I. Définitions.

1. Soit m un nombre entier positif et χ un caractère mod m , de conducteur $f(\chi)$. En prenant le caractère χ lui-même ou en prenant le caractère propre prolongement de ce caractère (égal à 0 pour tout entier non premier avec $f(\chi)$) on peut définir deux séries de Dirichlet dites séries L :

$$\begin{cases} L_m(s|\chi) = \sum_{(n,m)=1} \frac{\chi(n)}{n^s} \\ L(s|\chi) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s} \end{cases} .$$

Comme $|\chi(n)| \leq 1$ quel que soit n entier, on voit, par comparaison avec la série de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$, que les séries L sont absolument convergentes pour $\Re s > 1$ ($\Re s$ désignant la partie réelle de s).

Il en résulte, la fonction $\chi(n)$ étant multiplicative, que l'on a l'identité d'Euler ⁽¹⁾

$$\begin{cases} L_m(s|\chi) = \prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \\ L(s|\chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{les produits étant pris pour les nombres } p \text{ premiers} \end{array} .$$

On en déduit alors que :

$$L(s|\chi) = \left\{ \prod_{p|m} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \right\} L_m(s|\chi) .$$

2. Si $\chi \neq \varepsilon$, $\sum_1^{\varphi(f)} \chi(a) = 0$ donc $\sum_1^n \chi(a)$ est bornée quel que soit n entier positif ; il en résulte que l'abscisse de convergence simple α de $L(s|\chi)$ est

⁽¹⁾ La condition $a|b$ signifie : a divise b . La condition $a \nmid b$ signifie : a ne divise pas b .

inférieure ou égale à 0 quand $\chi \neq \varepsilon$.

Comme la série $\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)$ ne converge pas, $\alpha \geq 0$. Donc $\alpha = 0$.

Donc pour $\Re s > 0$, les fonctions $L(s|\chi)$ avec $\chi \neq \varepsilon$ sont des fonctions ana-
lytiques de s (limites uniformes, sur tout compact, de fonctions analytiques).

3. Définition de $\text{Log } L_m(s|\chi)$ et de $\text{Log } L(s|\chi)$.

Supposons s réel supérieur à 1 strictement. Le produit $\prod_p (1 - \frac{\chi(p)}{p^s})^{-1}$ étant absolument convergent, $L_m(s|\chi)$ fonction continue de s ne s'annule jamais pour $s > 1$, et quand $s \rightarrow \infty$, la convergence de $L_m(s|\chi)$ étant uniforme pour $s \geq s_0 > 0$, $L_m(s|\chi)$ a pour limite 1.

Il est donc possible pour $s > 1$ de définir la fonction $\text{Log } L_m(s|\chi)$ par continuité, en prenant $\lim_{s \rightarrow \infty} \text{Log } L_m(s|\chi) = 0$.

En prenant de même la détermination de $\text{Log}(1+z)$ qui s'annule pour $z=0$, on peut définir $\text{Log}(1 - \frac{\chi(p)}{p^s})^{-1}$ pour tout $s > 0$. (Car $|\chi(p)| \leq 1$ et $p \geq 2$). On a alors évidemment pour $s > 1$: $\text{Log } L_m(s|\chi) = \sum_{p \nmid m} \text{Log}(1 - \frac{\chi(p)}{p^s})^{-1}$.

On montrerait de la même manière que : $\text{Log } L(s|\chi) = \sum_p \text{Log}(1 - \frac{\chi(p)}{p^s})^{-1}$.

Mais en développant en série entière le $\text{Log}(1+z)$ pour $|z| < 1$ on obtient :

$$\text{Log}(1 - \frac{\chi(p)}{p^s})^{-1} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} \frac{(\chi(p))^v}{p^{vs}} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} \frac{\chi(p^v)}{p^{vs}}$$

et, en définitive, pour $s > 1$

$$\text{Log } L_m(s|\chi) = \sum_{p \nmid m} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} \frac{\chi(p^v)}{p^{vs}}$$

la série double du deuxième membre étant absolument convergente pour $s > 1$.

II. Le théorème de Dirichlet.

1. Posons $g(p) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} \frac{\alpha(p^v)}{p^{vs}}$.

On a alors, si $s \geq 1$

$$|g(p)| < \frac{1}{p^2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} \frac{1}{p^{v-2}} \leq \frac{1}{p^2}.$$

Et par conséquent

$$\sum_{p \nmid m} \frac{\chi(p)}{p^s} = \text{Log } L_m(s|\chi) + g_m(s|\chi)$$

où $g_m(s|\chi)$ reste bornée quand $s \geq 1$.

De même, $g(s|\chi)$ restant bornée quand $s \geq 1$, on peut écrire pour $s > 1$

$$\sum_{p \nmid m} \frac{\chi(p)}{p^s} = \text{Log}(s|\chi) + g(s|\chi) \quad .$$

2. $\chi(p)$ est évidemment constant et égal à $\chi(A)$ pour tout $p \in A$, où A est une classe de restes premiers avec m .

On a donc, pour $s > 1$

$$\sum_{p \nmid m} \frac{\chi(p)}{p^s} = \sum_{A \in \mathcal{S}_m} \chi(A) \sum_{p \in A} \frac{1}{p^s} \quad .$$

Posant $y_\chi = \sum_{p \nmid m} \frac{\chi(p)}{p^s}$ et $x_A = \sum_{p \in A} \frac{1}{p^s}$ nous avons donc

$$y_\chi = \sum_A \chi(A) x_A \quad .$$

Soit, en vertu du principe de dualité :

$$\sum_{p \in A} \frac{1}{p^s} = x_A = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(A) y_\chi \quad .$$

Soit finalement

$$\sum_{p \in A} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(A) \text{Log } L(s|\chi) + G(s|\chi) \quad .$$

3. Supposons que pour tout caractère χ distinct du caractère principal ϵ , $L(1|\chi)$ soit différent de 0. Alors, si $\chi \neq \epsilon$ en vertu de l'analyticité pour $\Re s > 0$, $L(s|\chi) \rightarrow L(1|\chi) \neq 0$. Donc, quand $s > 1$ tend vers 1, $\text{Log } L(s|\chi)$ précédemment défini reste borné.

D'autre part, $\text{Log } L(s|\epsilon) = \text{Log } \zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$ quand $s \rightarrow 1$.

Enfin $G(s|\chi)$ reste bornée.

Il en résulte alors que

$$\sum_{p \in A} \frac{1}{p^s} \sim \frac{1}{\varphi(m)} \operatorname{Log} \frac{1}{s-1} \quad \text{quand } s \rightarrow 1 \quad (s > 1) \quad .$$

On peut montrer aisément que ce résultat reste valable si $s \rightarrow 1$ de manière quelconque ; on en déduit alors, par des procédés analytiques, que si $\pi(x, A)$ désigne le nombre de p dans la classe A inférieurs à x , et si $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs à x on a :

$$\pi(x, A) \sim \frac{1}{\varphi(m)} \pi(x) \sim \frac{1}{\varphi(m)} \frac{x}{\operatorname{Log} x} \quad \text{quand } x \rightarrow \infty \quad .$$

Le résultat que nous avons obtenu montre immédiatement qu'il ne peut pas y avoir un nombre fini de nombres premiers dans la classe A (car alors $\sum_{p \in A} \frac{1}{p^s}$ serait borné quand $s \rightarrow 1$, donc aussi $\operatorname{Log} \frac{1}{s-1}$) ; c'est là le théorème de Dirichlet.

Si m et n sont premiers entre eux, il y a une infinité de nombres premiers de la forme $ma + n$ où a est entier positif.

III. Démonstration du fait que $L(1|\chi) \neq 0$ si χ n'est pas principal.

Si l'on considère le caractère χ de conducteur 4 tel que

$$\begin{cases} \chi(a) = 1 & \text{si } a \equiv 1 \pmod{4} \\ \chi(a) = -1 & \text{si } a \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

on peut calculer

$$L(1|\chi) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4} \quad .$$

On conçoit que, en utilisant les propriétés des racines de l'unité, on puisse ainsi calculer explicitement les valeurs de $L(1|\chi)$ pour un caractère χ quelconque (en utilisant la périodicité de $\chi(a)$ en a) et que l'on puisse ainsi montrer de manière purement algébrique la propriété fondamentale des séries- L du point de vue théorème de Dirichlet ⁽²⁾.

Le procédé étant long à exposer, nous utiliserons une méthode ayant recours à l'analyse. Plus précisément, posant

$$\zeta_m(s) = \prod_{\chi \in \mathcal{R}} L(s|\chi) = \zeta(s) \prod_{\chi \neq \epsilon} L(s|\chi)$$

$\mathcal{R}$ étant le groupe des caractères modulo m , nous écrirons pour $s > 1$

⁽²⁾ Voir : HASSE (Helmut). - Vorlesungen über Zahlentheorie. - Berlin, Springer-Verlag, 1950 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 59).

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_m(s) = \sum_1^{\infty} \frac{\sigma_m(n)}{n^s} \\ \text{avec } \sigma_m(n) = \sum_{n_1 \dots n_{\varphi(m)} = n} \chi(n_1) \dots \chi_{\varphi(m)}(n_{\varphi(m)}) \\ \text{(la somme étant étendue à toutes les décompositions de } n \text{ en} \\ \varphi(m) \text{ facteurs supérieurs ou égaux à } 1 \text{).} \end{array} \right.$$

Nous montrerons alors :

1° que l'abscisse α de convergence de la série $\sum_1^{\infty} \frac{\sigma_m(n)}{n^s}$ est telle que $\frac{1}{\varphi(m)} \leq \alpha \leq 1$ en calculant algébriquement les coefficients $\sigma_m(n)$.

2° qu'il en résulte que $\zeta_m(s)$ a un pôle pour $s = 1$, donc que $L(1|\chi) \neq 0$ pour tout $\chi \neq \varepsilon$.

1. Calcul de $\sigma_m(n)$.

a. Remarquons tout d'abord que $\sigma_m(n)$ est une fonction multiplicative : si $(n, n') = 1$, à toute décomposition $nn' = N_1 \dots N_{\varphi}$, on peut associer, de manière biunivoque, une décomposition de

$$n = n_1 \dots n_{\varphi} \text{ et de } n' = n'_1 \dots n'_{\varphi}$$

avec $n_j n'_j = N_j$ pour tout $j = 1, \dots, \varphi = \varphi(m)$. On a bien alors :

$$\begin{aligned} \sigma_m(nn') &= \sum_{N_1 \dots N_{\varphi} = nn'} \chi_1(N_1) \dots \chi_{\varphi}(N_{\varphi}) \\ &= \sum_{n_1 \dots n_{\varphi} = n} \left(\sum_{n'_1 \dots n'_{\varphi} = n'} \chi_1(n_1) \chi_1(n'_1) \dots \chi_{\varphi}(n_{\varphi}) \chi_{\varphi}(n'_{\varphi}) \right) \end{aligned}$$

soit $\sigma_m(nn') = \sigma_m(n) \sigma_m(n')$.

b. Il suffit donc de calculer $\sigma_m(p^{\nu})$ pour tout p -premier et tout ν entier.

Considérons alors la série formelle $S(x) = \prod_{\chi \in \mathcal{R}} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \chi(p^{\nu}) x^{\nu} \right)$; on a

$$S(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_{\varphi} = \nu} \chi(p)^{\nu_1} \dots \chi(p)^{\nu_{\varphi}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_m(p^{\nu}) x^{\nu}$$

on en déduit :

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_m(p^\nu) x^\nu \right) \prod_{x \in \mathcal{R}} (1 - x\chi(p)) = \prod_{x \in \mathcal{R}} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \chi(p^\nu) x^\nu \right) (1 - x\chi(p)) = 1 .$$

c. Nous allons maintenant transformer le produit $T(x) = \prod_{x \in \mathcal{R}} (1 - x\chi(p))$.

Soit $\mathcal{R}_p$ l'ensemble des $\chi \in \mathcal{R}$ tels que $\chi(p) \neq 0$ (c'est-à-dire tels que p soit premier avec leur conducteur). $\mathcal{R}_p$ est évidemment un sous-groupe de $\mathcal{R}$ et l'on a :

$$T(x) = \prod_{x \in \mathcal{R}_p} (1 - x\chi(p)) .$$

Soit alors $\mathcal{U}_p$ l'ensemble des $\chi \in \mathcal{R}$ tels que $\chi(p) = 1$. $\mathcal{U}_p$ est un sous-groupe de $\mathcal{R}_p$, soit g_p son ordre, f_p son index.

Si a est une classe de $\mathcal{R}_p / \mathcal{U}_p$, la fonction $\chi(p)$ a une valeur constante ζ_α quand p parcourt a . La correspondance $a \rightarrow \zeta_\alpha$ est évidemment un isomorphisme entre le groupe $\mathcal{R}_p / \mathcal{U}_p$ et le groupe multiplicatif des valeurs prises par $\chi(p)$ quand p parcourt $\mathcal{R}_p$.

En particulier, comme $(a)^{f_p} = e$, élément unité de $\mathcal{R}_p / \mathcal{U}_p$ d'ordre f_p , il en résulte que lorsque a parcourt $\mathcal{R}_p / \mathcal{U}_p$, ζ_α parcourt les f_p -racines f_p -ièmes de l'unité. On a donc :

$$\begin{aligned} T(x) &= \prod_{\chi \in \mathcal{R}_p} (1 - x\chi(p)) = \prod_{\alpha \in \mathcal{R}_p / \mathcal{U}_p} \left(\prod_{\chi \in \alpha} (1 - x\chi(p)) \right) \\ &= \prod_{\alpha} (1 - x\zeta_\alpha)^{g_p} = \left(\prod_{\alpha} (1 - x\zeta_\alpha) \right)^{g_p} . \end{aligned}$$

Mais $\prod_{\alpha} (1 - x\zeta_\alpha) = 1 - x^{f_p}$ puisque les ζ_α sont les racines f_p -ièmes de l'unité. On a donc $T(x) = (1 - x^{f_p})^{g_p}$, soit encore :

$$T(x) \times \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu + g_p - 1}{\nu} x^\nu f_p = 1 .$$

En comparant avec : $T(x) \times S(x) = 1$, il vient l'anneau des séries formelles étant d'intégrité :

$$S(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_m(p^\nu) x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu + g_p - 1}{\nu} x^\nu f_p .$$

Il en résulte alors par identification que les coefficients $\sigma_m(p^\nu)$ sont des entiers et que l'on a :

$$\begin{cases} \sigma_m(p^\nu) \geq 0 & \text{pour tout } \nu \geq 0 \\ \sigma_m(p^\nu) \geq 1 & \text{si } f_p \text{ divise } \nu \end{cases} .$$

d. f_p index de $\mathcal{R}_p/\mathcal{U}_p$ divise l'ordre de $\mathcal{R}_p$ qui divise l'ordre de $\mathcal{R}$ c'est-à-dire $\varphi(m)$. A fortiori, si ν est multiple de $\varphi(m)$, on a donc $\sigma_m(p^\nu) \geq 1$.

$\sigma_m(n)$ étant multiplicative, il en résulte que pour tout $n \geq 1$ on a : $\sigma_m(n) \geq 0$, et que $\sigma_m(n^{\varphi(m)}) \geq 1$.

La série $\sum_n \frac{\sigma_m(n)}{n^{1/\varphi(m)}}$ ne peut pas être convergente.

D'autre part, pour tout $s > 1$, $\sum_n \frac{\sigma_m(n)}{n^s}$ produit d'un nombre fini de séries absolument convergentes, est absolument convergente.

L'abscisse α de convergence simple de la série $\sum \frac{\sigma_m(n)}{n^s}$ est donc telle que
 $\frac{1}{\varphi(m)} \leq \alpha \leq 1$.

2. $\zeta_m(s)$ a un pôle pour $s = 1$.

a. Si $\chi \neq \varepsilon$, nous avons déjà vu que $L(s|\chi)$ étaient des fonctions holomorphes de s pour $s > 0$.

b. Si $\chi = \varepsilon$, $L(s|\varepsilon) = \zeta(s)$.

La fonction $(1 - \frac{2}{2^s}) \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$ pour $s > 1$, se prolonge pour $s > 0$ au moyen de la série de Dirichlet du deuxième membre, dont la somme est analytique pour $s > 0$.

La fonction $\zeta(s)$ est donc prolongeable pour $s > 0$ par une fonction méromorphe ne pouvant avoir comme seuls pôles que les zéros de $1 - \frac{2}{2^s}$.

Quand $s \rightarrow 1$, $1 - \frac{2}{2^s} \sim (s-1) \log 2$, et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{s \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s} = \log 2$.

En considérant la fonction

$$\left(1 - \frac{3}{3^s}\right) \zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(3n+1)^s} + \frac{1}{(3n+2)^s} - \frac{2}{(3n+3)^s} \right)$$

fonction qui est également prolongeable pour $s > 0$ par une fonction analytique, on voit facilement que le seul zéro de $1 - \frac{2}{2^s}$, pôle de $\zeta(s)$, est $s = 1$.

Pour $s > 0$ la fonction $\zeta(s)$ n'a qu'une seule singularité : le point $s = 1$ qui est un pôle de résidu 1.

o. La fonction $\zeta_m(s)$ ne peut donc avoir pour $s > 0$ que le point $s = 1$ comme singularité, cette singularité étant alors un pôle.

d. Si une fonction analytique $f(s)$ se développe en série de Dirichlet $\sum \frac{a_n}{n^s}$ d'abscisse de convergence simple α , les coefficients a_n étant positifs ou nuls, alors $f(s)$ a une singularité pour $s = \alpha$ (on suppose évidemment $f(s)$ prolongeable pour $\operatorname{Re} s < \alpha$).

Supposons le contraire : les singularités étant isolées, il existe $D > 0$ tel que $f(s)$ n'a pas de singularité pour $|s - \alpha| \leq D$.

Soit $\beta = \alpha + \frac{D}{3}$; $f(s)$ est développable en série de Taylor au point β , série de rayon de convergence supérieur ou égal à $\frac{2D}{3}$.

Soit

$$f(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(\beta) (s - \beta)^{\nu}.$$

Comme $\beta > \alpha$, on peut dériver $\sum \frac{a_n}{n^s}$ (qui représente $f(s)$ pour $s > \beta$) termes à termes. On a donc

$$\frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(\beta) = (-1)^{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\beta}} \frac{(\operatorname{Log} n)^{\nu}}{\nu!}.$$

Soit alors : $\gamma = \alpha - \frac{D}{4}$, $|\gamma - \beta| < \frac{2D}{3}$ donc $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(\beta) (\gamma - \beta)^{\nu}$ est convergente. Si $B_{\nu,n} = \frac{a_n}{n^{\beta}} \frac{(\{\beta - \gamma\} \operatorname{Log} n)^{\nu}}{\nu!}$, $B_{\nu,n}$ est positif et $\sum_{\nu} (\sum_n B_{\nu,n})$ est convergente. La famille $B_{\nu,n}$ est sommable, et par conséquent $\sum_n (\sum_{\nu} B_{\nu,n})$ est une série convergente. Or, cette série est $\sum \frac{a_n}{n^{\gamma}}$, ce qui est impossible puisque $\gamma < \alpha$ et que α est l'abscisse de convergence simple.

3. $L(1|\chi) \neq 0$ si $\chi \neq \varepsilon$.

En effet, d'après le lemme précédent $\zeta_m(s)$ représentable pour $s > \alpha$ par une série de Dirichlet à coefficients positifs a certainement une singularité pour $s = \alpha$, c'est-à-dire pour un point du segment $[\frac{1}{\varphi(m)}, 1]$.

D'après le lemme (c) cette singularité ne peut être qu'un pôle pour $s = 1$.

Si l'une au moins des séries $L(s|\chi)$ avait un zéro pour $s = 1$, le produit $\prod_{\chi \neq \varepsilon} L(s|\chi)$ aurait un zéro pour $s = 1$, et en vertu de l'analyticité $\frac{1}{s-1} \prod_{\chi \neq \varepsilon} L(s|\chi)$ resterait holomorphe pour $s = 1$. Comme $\zeta(s)$ a un pôle simple pour $s = 1$, $\zeta_m(s) = \zeta(s) \prod_{\chi \neq \varepsilon} L(s|\chi)$ resterait donc holomorphe, ce qui aboutit à une contradiction.
