

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

AHMET ABDIK

Problème des partitions

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 2 (1960-1961), exp. n° 13,
p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1960-1961__2__A13_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈME DES PARTITIONS

par Ahmet ABDIK

Étant donné un nombre entier positif n , on peut toujours le mettre sous la forme :

$$(R) \quad n = a_1 + \dots + a_s, \text{ les } a_i \text{ sont des entiers } > 0 .$$

On suppose que :

- (i) la répétition d'un même a_i est permise
- (ii) l'ordre des a_i n'intervient pas
- (iii) s est indéterminé.

Sous ces **trois conditions**, une représentation de n du type (R), s'appelle une partition de n .

On désignera par $p(n)$ le nombre de partitions de n . Il s'agit de trouver la valeur de $p(n)$. Ici, nous allons donner quelques formules asymptotiques pour $p(n)$.

Le problème est un problème additif. Donc associons à $p(n)$ sa fonction génératrice $f(x)$.

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n) x^n .$$

Cette fonction a été trouvée par EULER.

$$(1) \quad f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n) x^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-1}$$

$f(x)$ converge dans le cercle unité, ($|x| < 1$), et admet ce cercle comme coupure.

POLYA a démontré en 1915, que toute fonction représentée par une série entière, convergente dans le cercle unité, doit se comporter comme une fonction génératrice de ce type. Il a utilisé de telles séries, de nature simple, et en approchant $f(x)$, il a trouvé que la partie principale de $p(n)$ est :

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \frac{\exp[(2\pi/\sqrt{6}) (\sqrt{n - (1/2)})]}{\sqrt{(n - (1/24))}} .$$

En 1918, HARDY et RAMANUJAN ont trouvé une autre formule asymptotique. Ils ont remarqué qu'au voisinage d'un point rationnel du cercle unité, $f(x)$ avait plus de "poids". Or l'ensemble des points rationnels du cercle est dense sur la circonférence, d'où l'idée d'utiliser la suite de Farey et "Farey dissection".

Soit N un nombre entier positif.

$$(2) \quad p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(x)}{x^{n+1}} dx .$$

C est le cercle de centre 0 et de rayon

$$|x| = \exp(-2\pi N^{-2}) .$$

Soit \mathfrak{F}_N la suite de Farey d'ordre N .

$$\frac{h}{k} \in \mathfrak{F}_N, \quad 0 \leq \frac{h}{k} \leq 1$$

$P_{h/k}$ l'image de $\frac{h}{k}$ sur C . $P_{h/k}$ s'appelle point de Farey.

Si $\frac{h}{k}, \frac{h'}{k'} \in \mathfrak{F}_N$ consécutifs,

$$\mu = \frac{h + h'}{k + k'}, \quad \mu \notin \mathfrak{F}_N .$$

Soit P_μ son image sur C .

Soit $\nu = \frac{h + h''}{k + k''}$ et $\nu \notin \mathfrak{F}_N$, l'arc $P_\mu P_\nu$ sera appelé l'arc de Farey, et noté par $\xi_{h,k}$. La formule (2) devient

$$p(n) = \sum_{\substack{(h,k)=1 \\ 0 \leq h \leq k \leq N}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_{h,k}} \frac{f(x)}{x^{n+1}} dx .$$

RADEMACHER a modifié cette méthode, et a trouvé le même résultat. Nous allons étudier maintenant le problème sous cet angle.

Il se base sur un théorème de FORD.

Donnons-nous une suite de Farey d'ordre N . Soit $\frac{h}{k} \in \mathfrak{F}_N$.

Dans le plan complexe, considérons le point

$$r_{h,k} = \frac{h}{k} + \frac{i}{2k^2} \quad .$$

$C_{h,k}$ désignera le cercle de centre $r_{h,k}$, et de rayon $\frac{1}{2k^2}$ ($C_{h,k}$ s'appelle cercle de Ford).

Deux quelconques de ces cercles ne se coupent pas.

Soit $\frac{\ell}{m} \in \mathfrak{F}_N$.

$$|r_{h,k} - r_{\ell,m}|^2 - \left(\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2m^2}\right)^2 = \frac{(h_m - \ell_k)^2 - 1}{k^2 m^2} \geq 0 \quad .$$

$C_{h,k}$ et $C_{\ell,m}$ sont tangents, si $h_m - \ell_k = 1$, c'est-à-dire si $\frac{h}{k}$ et $\frac{\ell}{m}$ sont consécutifs avec $N = k + m - 1$.

Soient trois éléments consécutifs :

$$\frac{h_1}{k_1} < \frac{h}{k} < \frac{h_2}{k_2} \quad .$$

$C_{h,k}$ a un point de contact avec C_{h_1, k_1} , et un autre point de contact avec C_{h_2, k_2} .

On obtient un arc $\gamma_{h,k}$ sur $C_{h,k}$ quand on parcourt ces cercles dans le sens négatif.

Les coordonnées des extrémités de $\gamma_{h,k}$ sont

$$\begin{cases} \frac{-k_1}{k(k^2 + k_1^2)} + \frac{i}{k^2 + k_1^2} + \frac{h}{k} = \xi'_{h,k} + \frac{h}{k} \\ \frac{-k_2}{k(k^2 + k_2^2)} + \frac{i}{k^2 + k_1^2} + \frac{h}{k} = \xi''_{h,k} + \frac{h}{k} \end{cases} \quad .$$

On obtient donc

$$p(n) = \sum_{0 \leq h < k \leq N} \int_{\gamma_{h,k}} f(\exp 2\pi i r) \exp(-2\pi i n r) dr$$

avec, si $r = \sigma + it$ et $t > 0$,

$$x = \exp 2\pi i r$$

alors $|x| < 1$.

REMARQUE. - Soit la fonction

$$\eta(r) = \exp(\pi i r/12) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \exp 2\pi i n r) , \quad r = \sigma + it , \quad t > 0$$

alors $\eta(r)$ a un sens.

Si on change r en $\frac{ar + b}{cr + d}$, a , b , c , d entiers tels que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$$

on a :

$$\eta\left(\frac{ar + b}{cr + d}\right) = \varepsilon \exp\left[\frac{\pi i}{12} \sqrt{(cr + d)/i}\right] \eta(r) ,$$

avec $\varepsilon^{24} = 1$, $r + 1 = \frac{1 \cdot r + 1}{0 \cdot r + 1}$ et $-\frac{1}{r} = \frac{0 \cdot r + 1}{1 \cdot r + 0}$

$$\eta(r + 1) = \exp(\pi i/12) \eta(r) \times \eta[(ar + b)/(cr + d)] = \exp(\pi i/12) \eta((ar + b)/(cr + d)) .$$

Reprenons notre problème :

$$p(n) = \sum_{0 < h < k < N} \int_{\gamma_{h,k}} f(\exp 2\pi i r) \exp(-2\pi i n r) dr .$$

Faisons les changements de variable.

$$r = \frac{h}{k} + \xi$$

$$p(n) = \sum_{\substack{0 < h < k < N \\ (h,k)=1}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} f\left(\exp 2\pi i \left(\frac{h}{k} + \xi\right) \times \exp(-2\pi i n \left(\frac{h}{k} + \xi\right))\right) d\xi .$$

Posons encore :

$$\xi = \frac{iz}{k^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z'_{h,k} = \frac{k^2}{k^2 + k_1^2} + \frac{kk_1}{k^2 + k_1^2} \\ z''_{h,k} = \frac{k^2}{k^2 + k_2^2} + \frac{kk_2}{k^2 + k_2^2} \end{array} \right. .$$

Le cercle $C_{h,k}$ se transforme en un cercle $K_{h,k}$, de centre $z = 1/2$ et de rayon égal $1/2$; il est donc tangent en 0 à l'axe imaginaire.

Notre fonction devient :

$$p(n) = \sum_{\substack{0 \leq h < k \leq N \\ (h,k)=1}} k^{-2} \int_{z'_{h,k}}^{z''_{h,k}} f(\exp 2\pi i (\frac{h}{k} + \frac{iz}{k^2})) \times \exp(-2\pi i (\frac{h}{k} + \frac{iz}{k^2})) dz .$$

Remarquons que :

$$f(e^{2\pi ir}) = \frac{\exp \pi i (r/12)}{\eta(r)} .$$

Remarquons que :

$$\eta\left(\frac{ar + b}{cr + d}\right) = \varepsilon \frac{\sqrt{cr + d}}{i} \eta(r)$$

$$r = \frac{h}{k} + \frac{12}{k^2}, \quad \frac{ar + b}{cr + d} = \frac{h'}{k} + \frac{i}{z}$$

on obtient :

$$c = k, \quad d = -h$$

$$f(\exp 2\pi i (\frac{h}{k} + \frac{iz}{k^2})) = \omega_{h,k} \sqrt{z/k} \exp((\pi/12) (\frac{1}{z} - \frac{z}{k^2})) \times f(\exp 2\pi i (\frac{h'}{k} + \frac{i}{z}))$$

$$\text{avec } \omega_{h,k} = \varepsilon \cdot \exp \pi i (\frac{h - h'}{12k}), \quad (\omega_{h,k})^{24} = 1$$

$$p(n) = \sum_{0 \leq h < k \leq N} i\omega_{h,k} \exp(-2\pi i(hn/k)) k^{-5/2} \times \\ \times \left\{ \int_{z'_{h,k}}^{z''_{h,k}} \sqrt{z} \exp\left(\frac{\pi}{12} \left(\frac{1}{z} - \frac{z}{k^2}\right)\right) \times f\left(\exp\left(2\pi i\left(\frac{h}{k} + \frac{1}{z}\right)\right) \times \exp(2\pi nz/k^2)\right) \right\} dz$$

posons

$$G_k(z) = \sqrt{z} \exp\left(\frac{\pi}{12} \left(\frac{1}{z} - \frac{z}{k^2}\right)\right)$$

$$p(n) = \sum_{0 \leq h < k \leq N} i\omega_{h,k} \exp(-2\pi i(hn/k)) \times k^{-5/2} \times I_{h,k} \\ + \sum_{0 \leq h < k \leq N} i\omega_{h,k} \exp(-2\pi i(hn/k)) I_{h,k}^\alpha \quad .$$

Avec

$$I_{h,k} = \int_{z'_{h,k}}^{z''_{h,k}} G_k(z) \exp(2\pi nz/k^2) dz$$

$$I_{h,k}^\alpha = \int_{z'_{h,k}}^{z''_{h,k}} G_k(z) \times \left\{ f\left(\exp\left(2\pi i\left(\frac{h}{k} + \frac{1}{z}\right)\right)\right) - 1 \right\} \exp(2\pi nz/k^2) dz \quad .$$

On a montré que $I_{h,k}^\alpha$ tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$.

$$|z'_{h,k} - z''_{h,k}| < \frac{4k}{N}, \quad |z| \leq 1, \quad R(z) \leq 1, \quad R\left(\frac{1}{z}\right) \geq 1, \\ x + iy = z \Rightarrow x^2 + y^2 \leq x.$$

On trouve

$$|I_{h,k}^\alpha| \leq C \left(\frac{k}{N}\right)^{3/2}, \quad C \text{ est une constante}$$

$$\left| \sum_{0 \leq h < k \leq N} i\omega_{h,k} \exp(-2\pi i(hn/k)) \times k^{-5/2} I_{h,k}^\alpha \right| \leq C \sum_{0 \leq h < k \leq N} k^{-5/2} \left(\frac{k}{N}\right)^{3/2} \\ \leq \frac{C}{N^{1/2}}$$

$$p(n) = \sum_{0 \leq h < k \leq N} i\omega_{h,k} \exp(-2\pi i(hn/k)) \cdot k^{-5/2} I_{h,k} + o(N^{-1/2}) \quad .$$

Soit le cercle K , de centre $z = 1/2$ de rayon $= 1/2$

$$I_{h,k} = \int_{K^-} G_k(z) \exp(2\pi n z/k^2) dz - \int_0^{z_{h,k}'} G_k(z) \exp(2\pi n z/k^2) dz \\ - \int_{z_{h,k}''}^0 |G_k(z)| \leq O\sqrt{k/N} \quad .$$

On démontre de la même façon que :

$$I_{h,k} = \int_{K^-} G_k(z) \exp(2\pi n z/k^2) dz + O\left(\frac{k}{N}\right)^{3/2} \quad .$$

On a finalement :

$$p(n) = \sum_{0 < h < k < N} \omega_{h,k} \exp(-2\pi i(hn/k)) k^{-5/2} \times \int_{K^-} G_k(z) \exp(2\pi n z/k^2) dz \\ + O(N^{-1/2})$$

posons :

$$A_k(n) = \sum_{\substack{0 < h < k < N \\ (h,k)=1}} \omega_{h,k} \exp(-2\pi i h n/k)$$

$$p(n) = 1 \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) \times k^{-5/2} \int_{K^-} G_k(z) \exp(2\pi n z/k^2) dz + O(N^{-1/2}) \quad .$$

Faisons le changement de variable.

$$z = \frac{1}{\omega} \quad .$$

Le cercle K , se transforme en une droite parallèle à l'axe imaginaire.

Finalement, posons $s = \frac{\pi\omega}{12}$, nous obtenons alors :

$$p(n) = 2\pi(24n - 1)^{-3/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k(n)}{k} J_{3/2} \left(\frac{\pi}{k} \sqrt{2/3(n - 1/24)} \right)$$

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) \cdot k^{1/2} \frac{d}{dn} \left(\frac{\sinh C/k\sqrt{n - (1/24)}}{\sqrt{n - (1/24)}} \right) + O(N^{-1/2})$$

$J_{3/2}$ fonction de Bessel.

INGHAM a trouvé une autre solution, en se servant d'un théorème tauberien

$$p(n) \sim \frac{\exp \pi \sqrt{2n/3}}{(4\sqrt{3})^n}$$

$$q(n) \sim \frac{\exp \pi \sqrt{n/3}}{4.3^{1/4} \cdot n^{3/4}} \quad q(n) \text{ , partition impaire} \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE.

1° Concernant la "Farey dissection", voir :

HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers.
- Oxford, Clarendon Press, 1954.

2° Pour la transformation de la fonction $f(x)$, consulter :

RADEMACHER (Hans). - On the partitions functions $p(n)$, Proc. London math. Soc., t. 43, 1937, p. 241-254.

RADEMACHER (Hans). - On the expansion of the partition function in a series, Annals of Math., t. 44, 1943, p. 416-422.

RADEMACHER (Hans). - Lectures notes on analytic additive number theory. - University of Oregon, National Science Foundation, 1954.

3° Voir aussi :

FORD (L. R.). - Fractions, Amer. math. Monthly, t. 45, 1938, p. 586-601.

HARDY (G. H.) and RAMANUJAN (S.). - Asymptotic formulae in combinatory analysis, Proc. London math. Soc., t. 17, 1918, p. 75-115.

INGHAM (A. E.). - A Tauberian theorem for partitions, Annals of Math., t. 42, 1941, p. 1075-1090.
