

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

CHARLES PISOT

Suites de Farey

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 2 (1960-1961), exp. n° 11, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1960-1961__2__A11_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUITES DE FAREY

par Charles PISOT

DÉFINITION. - On appelle suite de Farey de rang n , la suite des fractions irréductibles $\frac{a}{b}$, rangées par ordre croissant, pour lesquelles on a $1 \leq b \leq n$.

Il suffit d'ailleurs de supposer $0 \leq \frac{a}{b} < 1$, car la partie de la suite de Farey comprise entre les entiers m et $m+1$ se déduit de celle comprise entre 0 et 1 en ajoutant m à cette dernière.

EXEMPLE. - Pour $n = 5$, on a, entre 0 et 1, les fractions : $\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$.

Leur nombre est $\sum_{k=1}^n \varphi(k)$, où φ est la fonction d'Euler.

PROPRIÉTÉS. - Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ deux fractions consécutives de la suite de Farey de rang n .

Les vecteurs (a, b) et (a', b') constituent alors une base du réseau des points à coordonnées entières. En effet le triangle, ayant pour sommets les points $(0, 0)$, (a, b) , (a', b') , ne peut contenir aucun point du réseau autre que ses sommets, car sinon il existerait une fraction de la suite de Farey de rang n comprise entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$.

Par suite, on a $ab' - ba' = \pm 1$. La fraction $\frac{a+a'}{b+b'}$, qui s'appelle la médiane entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$, est alors aussi irréductible et elle est comprise entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$; la médiane ne peut donc appartenir à la suite de rang n , c'est-à-dire qu'on a $b + b' > n$.

Résumons :

THÉORÈME. - Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ deux fractions consécutives de la suite de Farey de rang n , alors on a $b + b' \geq n + 1$ et $ab' - ba' = \pm 1$.

APPLICATION. - Soit ξ un nombre réel arbitraire. Quel que soit l'entier $n > 0$, il existe alors une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ telle que

$$|\xi - \frac{a}{b}| \leq \frac{1}{b(n+1)}$$

et que

$$1 \leq b \leq n \quad .$$

En effet, considérons la suite de Farey de rang n ; le nombre ξ tombe dans l'un des intervalles $\frac{a}{b}, \frac{a+a'}{b+b'}$ ou $\frac{a+a'}{b+b'}, \frac{a'}{b'}$; supposons que ce soit dans le premier, alors on a

$$|\xi - \frac{a}{b}| \leq |\frac{a+a'}{b+b'} - \frac{a}{b}| = \frac{1}{b(b+b')} \leq \frac{1}{b(n+1)} \quad .$$

Il en résulte aussi que, quel que soit le nombre réel $\rho \geq 1$, il existe toujours une fraction irréductible $\frac{a}{b}$, avec $1 \leq b \leq \rho$, telle que $|\xi - \frac{a}{b}| < \frac{1}{\rho b}$.

En effet, il suffit d'appliquer le résultat précédent avec $n = [\rho]$.

Méthode de Hardy et Littlewood. - Soit $u_1, \dots, u_k, \dots$ une suite strictement croissante d'entiers positifs ; le problème de la théorie additive consiste à trouver le nombre de manières d'écrire un entier n comme somme de s entiers de la suite. Pour cela, posons

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{u_k} \quad ,$$

alors on a immédiatement

$$[f(z)]^s = \sum_{n=0}^{\infty} r(n) z^n$$

où $r(n)$ est le nombre de manières cherché. Or on a

$$r(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{[f(z)]^s}{z^{n+1}} dz$$

où C est un cercle $|z| = \theta$ avec $0 < \theta < 1$.

Considérons alors la suite de Farey de rang n^α où $0 < \alpha < 1$; les nombres $\rho = \exp 2i\pi(a/b)$, où $\frac{a}{b}$ est une fraction avec $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1$ de cette suite de Farey, sont des racines primitives de l'unité. Si $\frac{a'}{b'} < \frac{a}{b} < \frac{a''}{b''}$ sont des fractions consécutives de cette suite de Farey, nous désignons par C_ρ l'arc de C défini par $z = \theta \exp i\omega$ avec $2\pi \frac{a+a'}{b+b'} \leq \omega \leq 2\pi \frac{a+a''}{b+b''}$. Supposons que

$$\lim_{\theta \rightarrow 1} (1 - \theta)^\lambda f(\theta\rho) = A_\rho$$

existe pour un certain $\lambda > 0$, alors on remplace $f(z)$ par $\psi_\rho(z) = \frac{A_\rho}{(1 - \frac{z}{\rho})^\lambda}$ sur C_ρ .

Suites de Farey et hypothèse de Riemann. - Soit μ la fonction de Möbius, et

$$\mathfrak{M}(x) = \sum_{k \leq x} \mu(k) \quad .$$

Si l'on suppose que

$$\mathfrak{M}(x) = O(x^{(1/2)+\varepsilon}) \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0 ,$$

alors l'hypothèse de Riemann est vraie ; en effet, dans ces conditions, on a, pour $s > 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\mu(k)}{k^s} &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathfrak{M}(k) \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s} \right) + \frac{\mathfrak{M}(n)}{n^s} \\ &= s \int_1^n \frac{\mathfrak{M}(x)}{x^{s+1}} dx + \frac{\mathfrak{M}(n)}{n^s} \quad . \end{aligned}$$

Par suite, pour $s = \frac{1}{2} + \varepsilon$, on voit que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^{(1/2)+\varepsilon}}$ converge, et sa valeur est $s \int_1^{\infty} \frac{\mathfrak{M}(x)}{x^{s+1}} dx$; cette intégrale est donc holomorphe pour $\Re(s) > \frac{1}{2}$.

Or pour $\Re(s) > 1$, elle vaut $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)$, donc elle vaut $\frac{1}{\zeta(s)}$ aussi pour $\Re(s) > \frac{1}{2}$ et $\zeta(s)$ ne peut s'annuler.

HARDY et LITTLEWOOD ont montré que, réciproquement, l'hypothèse de Riemann entraîne $\mathfrak{M}(x) = O(x^{(1/2)+\varepsilon})$.

Considérons alors la somme des racines primitives b -ièmes de l'unité, donc $\sum_{1 \leq a \leq b} \exp 2i\pi(a/b)$, où a est premier à b ; désignons par $S(b)$ cette somme.

Si $T(b)$ est la somme de toutes les racines b -ièmes de l'unité, on a

$$T(b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b = 1 \\ 0 & \text{si } b \geq 2 \end{cases} \quad .$$

Or

$$T(b) = \sum_{d|b} S(d) \quad ,$$

d'où, par inversion de Möbius,

$$S(b) = \sum_{d|b} \mu\left(\frac{b}{d}\right) T(d) = \mu(b) \quad .$$

Par suite

$$\mathfrak{M}(n) = \sum_{b=1}^n \mu(b) = \sum_{m=1}^A \exp 2\pi i r_m$$

où r_m parcourt les A fractions de la suite de Farey de rang n .

Or on peut écrire :

$$\mathfrak{M}(n) = \sum_{m=1}^A \exp 2\pi i(m/A) \cdot \exp 2\pi i\delta_m \quad \text{avec} \quad \delta_m = r_m - \frac{m}{A}$$

d'où

$$\mathfrak{M}(n) = \sum_{m=1}^A \exp 2\pi i(m/A) + \sum_{m=1}^A \exp 2\pi i(m/A) ((\exp 2\pi i\delta_m) - 1)$$

$$|\mathfrak{M}(n)| \leq 2 \sum_{m=1}^A |\sin \pi\delta_m| \leq 2\pi \sum_{m=1}^A |\delta_m| \quad .$$

Par conséquent, si on suppose que

$$\sum_{m=1}^A |\delta_m| = O(x^{(1/2)+\varepsilon}) \quad \text{pour tout} \quad \varepsilon > 0 ,$$

l'hypothèse de Riemann est vraie.

Pour établir la réciproque, soit $0 \leq x \leq 1$ et $g(x)$ le nombre des r_m vérifiant $r_m \leq x$. On a alors :

$$g(x) = \sum_{h=1}^n [hx] \mathfrak{M}\left(\frac{n}{h}\right) \quad .$$

En effet, l'égalité est vraie pour $x = 0$. Lorsque $g(x)$ augmente d'une unité, en passant de r_m à $r_{m+1} = \frac{a}{b}$ le membre de droite augmente de

$$\sum_{b|h} \mathfrak{M}\left(\frac{n}{h}\right) = \sum_{k \leq x/b} \mathfrak{M}\left(\frac{n/b}{k}\right) \quad .$$

Or

$$\sum_{k \leq c} \mathfrak{M}\left(\frac{c}{k}\right) = \sum_{k \leq c} \sum_{d \leq c/k} \mu(d) = \sum_{dk \leq c} \mu(d) = \sum_{g \leq c} \sum_{d|g} \mu(d) = 1 \quad .$$

Donc le résultat est vrai pour tout x .

En particulier pour $x = 1$, on a

$$A = \sum_{h=1}^n h \mathfrak{M}\left(\frac{n}{h}\right) \quad .$$

Posons maintenant

$$I = \int_0^1 G^2(x) dx \quad \text{avec} \quad G(x) = g(x) - Ax + \frac{1}{2} \quad .$$

On a

$$g(x) = \sum_{h=1}^n [hx] \mathfrak{M}\left(\frac{n}{h}\right)$$

$$- Ax = \sum_{h=1}^n hx \mathfrak{M}\left(\frac{n}{h}\right)$$

$$\frac{1}{2} = \sum_{h=1}^n \frac{1}{2} \mathfrak{M}\left(\frac{n}{h}\right)$$

d'où :

$$G(x) = - \sum_{h=1}^n \omega(hx) \mathfrak{M}\left(\frac{n}{h}\right) \quad \text{avec} \quad \omega(x) = x - [x] - \frac{1}{2} \quad .$$

On a

$$\omega(x) = - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n} \quad .$$

On a alors

$$\int_0^1 \omega(hx) \omega(kx) dx = \frac{1}{12 uv} \quad \text{où} \quad \begin{cases} h = ud \\ k = vd \end{cases}, \quad (u, v) = 1 \quad .$$

En effet cette intégrale vaut

$$\frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{h=1 \\ k=1}}^{\infty} \int_0^1 \frac{\cos 2(nh - mk) \pi x - \cos 2(nh + mk) \pi x}{nm} dx \quad .$$

Les différentes intégrales partielles sont toutes nulles, sauf si $nh - mk = 0$, donc $n = wv$, $m = wu$, d'où

$$\int_0^1 \omega(hx) \omega(kx) dx = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{w=1}^{\infty} \frac{1}{w^2 uv} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{1}{uv} = \frac{1}{12 uv} \quad .$$

On en déduit

$$I = \int_0^1 \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \omega(hx) \omega(kx) \mathfrak{M}\left(\frac{n}{h}\right) \mathfrak{M}\left(\frac{n}{k}\right) dx = \frac{1}{12 uv} \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \mathfrak{M}\left(\frac{n}{h}\right) \mathfrak{M}\left(\frac{n}{k}\right) \quad .$$

D'autre part

$$I = \sum_{m=0}^{A-1} \int_{r_m}^{r_{m+1}} \left[g(x) - Ax + \frac{1}{2} \right]^2 dx = \sum_{m=0}^{A-1} \int_{r_m}^{r_{m+1}} \left(m + \frac{1}{2} - Ax \right)^2 dx = \frac{1}{12} + A \sum_{m=1}^A \delta_m^2$$

et

$$\sum_{m=1}^A \delta_m^2 = \frac{1}{A} \left(1 - \frac{1}{12}\right) .$$

Enfin, on a $A = A(n)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n^2} > 0$.

En effet :

$$\begin{aligned} A(n) &= \sum_{m=1}^n \mu(m) = \sum_{m=1}^n m \sum_{k|m} \frac{\mu(h)}{h} = \sum_{h=1}^n \frac{\mu(h)}{h} \sum_{\substack{h \leq n \\ h|m}} m \\ &= \sum_{h=1}^n \frac{\mu(h)}{h} \sum_{k \leq n/h} hk = \sum_{h=1}^n \mu(h) \sum_{k \leq n/h} k = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \mu(h) \left(\left[\frac{n}{h} \right]^2 + \left[\frac{n}{h} \right] \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \mu(h) \left[\frac{n}{h} \right]^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \mu(h) \frac{n^2}{h^2} + O \left(\sum_{h=1}^n \left(\frac{n}{h} \right) \right) + O(1) \\ &= \alpha n^2 + O(n \log n) , \quad \text{où } \alpha = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\mu(h)}{h^2} = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2} . \end{aligned}$$

Si alors $|\mathbb{M}(x)| < C(\varepsilon) x^{(1/2)+(\varepsilon/2)}$, on a

$$\begin{aligned} |I| &< C^2(\varepsilon) \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{n^{(1/2)+(\varepsilon/2)}}{h^{(1/2)+(\varepsilon/2)}} \frac{n^{(1/2)+(\varepsilon/2)}}{k^{(1/2)+(\varepsilon/2)}} \cdot \frac{1}{uv} \\ &= C^2(\varepsilon) n^{1+\varepsilon} \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{(uv)^{(3/2)+(\varepsilon/2)} d^{1+\varepsilon}} \end{aligned}$$

qui converge. Par suite

$$\sum_{m=1}^A \delta_m^2 = O(n^{-1+\varepsilon}) .$$

Or, d'après l'inégalité de Schwarz, on a

$$\sum_{m=1}^A |\delta_m| \leq \sqrt{A \sum_{m=1}^A \delta_m^2}$$

et

$$A = \sum_{m=1}^n \mu(m) \leq \sum_{m=1}^n m < n^2 \quad ,$$

donc

$$\sum_{m=1}^A |\delta_m| = O(n^{(1/2)+\varepsilon}) \quad , \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0$$

Cette dernière relation est donc équivalente à l'hypothèse de Riemann.
