

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

GILLES GODEFROY

Une remarque sur les isomorphismes entre $\ell^\infty(\mathbb{N})$ et $L^\infty([0, 1]; dx)$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, n° 2 (1977-1978), exp. n° C8, p. C1-C2

http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A13_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE REMARQUE SUR LES ISOMORPHISMES ENTRE $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ET $L^\infty([0, 1]; dx)$

par Gilles GODEFROY

Il est bien connu que les espaces $\ell^\infty(\mathbb{N})$ et $L^\infty([0, 1]; dx)$, que nous désignerons par ℓ^∞ et L^∞ , sont isomorphes. Rappelons la démonstration : On explicite aisément un plongement φ_1 de ℓ^∞ dans L^∞ , un plongement φ_2 de L^∞ dans ℓ^∞ . On montre ensuite, en utilisant une récurrence transfinie, que chacun de ces espaces est facteur direct dans tout Banach le contenant. Enfin, après avoir remarqué que chacun d'eux est isomorphe à son carré, on utilise le "lemme d'accordéon" de Pelczinski.

On veut, ici, souligner que, dans un sens qui sera précisé ci-dessous, il n'y a pas d'isomorphisme explicitable entre ℓ^∞ et L^∞ .

En effet, soit $\varphi : \ell^\infty \rightarrow L^\infty$ un isomorphisme. On peut, bien sûr, supposer que $\|\varphi\| \leq 1$. Soient $B_1(\ell^\infty)$ et $B_1(L^\infty)$ les boules unités fermées. On munit ces ensembles des topologies $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$ et $\sigma(L^\infty, L^1)$, et on pose

$$K = (B_1(\ell^\infty), \sigma(\ell^\infty, \ell^1)), \quad K = (B_1(L^\infty), \sigma(L^\infty, L^1)).$$

Les espaces K et K sont des compacts métrisables. Il est raisonnable d'affirmer que, si φ est donnée de façon explicite, alors l'application $\varphi|_K : K \rightarrow K$ a la propriété de Baire faible. Supposons donc que ce soit le cas. Soit alors $f \in L^1$. La restriction de $f \circ \varphi$ à K a alors la propriété de Baire faible. Or, d'après un résultat de TALAGRAND [2], $f \circ \varphi|_K$ est alors continue. Donc, d'après le théorème de Banach-Dieudonné, $(f \circ \varphi) \in \ell^1$. L'isomorphisme φ serait alors continu de $(\ell^\infty, \sigma(\ell^\infty, \ell^1))$ dans $(L^\infty, \sigma(L^\infty, L^1))$, et serait alors le transposé d'un isomorphisme entre ℓ^1 et L^1 . Or, ces deux espaces ne sont pas isomorphes.

Remarque. - Une démonstration analogue, utilisant cette fois un résultat de CHRISTENSEN ([1], théorème 4.10), montre que l'isomorphisme inverse $\varphi^{-1} : L^\infty \rightarrow \ell^\infty$, n'a pas la propriété de Baire forte relativement aux topologies préfaibles.

Examinons plus attentivement l'"obstacle à l'explicitabilité" qui se présente. Les propriétés $\ell^\infty \simeq \ell^\infty \times \ell^\infty$ et $L^\infty \simeq L^\infty \times L^\infty$, ainsi que le "lemme d'accordéon" de Pelczinski, se démontrent de façon directe. Considérons, de plus, le plongement

$$\varphi_1 : \ell^\infty \rightarrow L^\infty$$

$$(a_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{A_n},$$

où $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'ouverts disjoints de $[0, 1]$. L'application

$$\pi : L^\infty \longrightarrow L^\infty$$

$$f \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_{A_n} f(x) \, dx \right) \times \frac{\chi_{A_n}}{\int_{A_n} dx}$$

est une projection de L^∞ sur $\varphi_1(\ell^\infty)$.

La démonstration classique de l'existence d'un isomorphisme entre ℓ^∞ et L^∞ , jointe aux remarques ci-dessus, permet alors d'affirmer qu'on ne peut expliciter à la fois un plongement ψ de L^∞ dans ℓ^∞ et une projection π de ℓ^∞ sur $\psi(L^\infty)$.

Lorsque π est explicitée, par exemple si φ est un isomorphisme et $\pi = \text{Id}(\ell^\infty)$, le plongement ψ ne pourra être explicité.

Inversement, considérons un plongement ψ explicité. Par exemple,

$$\psi : L^\infty \longrightarrow \ell^\infty$$

$$f \longmapsto \frac{1}{b_n - a_n} \int_{a_n}^{b_n} f(t) \, dt,$$

où $\{(a_n, b_n)\}_{n \in \mathbb{N}} = \{(p, q) \in (\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \times (\mathbb{Q} \cap [0, 1]) ; p < q\}$. Alors, l'espace $\psi(L^\infty)$ sera facteur direct dans ℓ^∞ , mais on ne pourra expliciter aucun de ses supplémentaires topologiques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHRISTENSEN (J. P. R.). - Topology and Borel structure. - Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1974 (North-Holland Mathematics Studies, 10 ; Notas de Matematica, 51).
- [2] TALAGRAND (H.). - Les fonctions affines sur $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ ayant la propriété de Baire faible sont continues, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 15e année, 1975/76, Communication n° 7, 3 p.

(Texte reçu le 29 juin 1978)

Gilles GODEFROY
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05