

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

PETER KOLMUS

Espaces Σ -complètement réguliers

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 16 (1976-1977), exp. n° C4, p. C1-C9

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1976-1977__16__A9_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ESPACES σ -COMPLÈTEMENT RÉGULIERS

par Peter KOLMUS

1. Introduction.

L'objet de ce travail est de donner une caractérisation des sous-espaces des espaces $\mathcal{K}_\sigma$ séparés. Un aspect de leur importance tient au fait qu'un ensemble $\mathcal{K}$ -analytique, partie d'un espace $\mathcal{K}_\sigma$ séparé X , est $\mathcal{K}$ -souslinien, donc capacitabile pour toute capacité de Choquet, défini sur l'espace X (CHOQUET [1]).

La question de savoir quels espaces séparés de Lindelöf sont plongeables dans un espace $\mathcal{K}_\sigma$ séparé était résolu par MacGIBBON [2]. Puisque un ensemble $\mathcal{K}$ -analytique est de Lindelöf, il existe déjà un critère de plongement pour les espaces $\mathcal{K}$ -analytiques. Cependant, la propriété d'être de Lindelöf ne joue aucun rôle par rapport au plongement d'un espace séparé dans un espace $\mathcal{K}_\sigma$ séparé.

La caractérisation de sous-espaces d'un espace $\mathcal{K}_\sigma$ séparé que l'on donne ici est très près de la caractérisation de sous-espaces d'un espace compact, c'est-à-dire les espaces complètement réguliers. Parmi les caractérisations de ces derniers espaces, nous signalons la suivante.

Pour qu'un espace topologique E soit complètement régulier, il faut et il suffit que la topologie sur E soit engendrée par une sous-famille de $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ qui sépare les points et les fermés de E .

Cependant, il existe des espaces $\mathcal{K}_\sigma$ séparés qui admettent seulement les constantes comme fonctions continues (voir exemple 2, paragraphe 3), donc il n'y a aucune possibilité d'obtenir une caractérisation par rapport aux fonctions continues pour la topologie donnée. En dépit de cette difficulté, on est toujours conduit à chercher un critère en termes de fonctions dans $\mathbb{R}$ pour simplifier le problème de plongement.

2. Préliminaires.

Désormais, par la notation $\mathcal{C}(E)$, il est entendu qu'il s'agira de fonctions continues bornées de E dans $\mathbb{R}$, où E est un espace topologique.

On aura besoin de diverses notions de séparation.

Deux parties A, B d'un espace topologique E sont :

- (a) séparées dans E , s'il existe deux ouverts disjoints U, V dans E tels que $A \subset U$ et $B \subset V$,
- (b) complètement séparées, s'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}(E)$ telle que $0 \leq f \leq 1$,

$f \equiv 0$ sur A , $f \equiv 1$ sur B ,

(c) $\mathcal{G}$ -séparées, s'il existe une fonction $f \in \mathcal{G}$ telle que $0 \leq f \leq 1$, $f \equiv 0$ sur A , $f \equiv 1$ sur B , où $\mathcal{G}$ est une famille de fonctions numériques bornées sur E .

Si la famille $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel coréticulé de $\widetilde{\mathbb{R}}^E$ contenant les constants, alors deux parties A, B de E sont $\mathcal{G}$ -séparées s'il existe une fonction $f \in \mathcal{G}$ telle que

$$\sup_{x \in A} f(x) = \alpha < \beta = \inf_{x \in B} f(x),$$

car les parties A, B sont $\mathcal{G}$ -séparées par la fonction

$$g = (\beta - \alpha)^{-1} [((\alpha \vee f) \wedge \beta) - \alpha].$$

Soit E un espace topologique, réunion d'une suite croissante dénombrable (E_n) de sous-espaces. La topologie inductive sur E par rapport aux sous-espaces E_n est toujours plus fine que la topologie donnée sur E . Pour les distinguer, la notation $\mathcal{C}[(E_n)]$ représentera la famille de fonctions numériques bornées sur E , continues par rapport à la topologie inductive sur E . Donc, pour que la fonction f appartienne à $\mathcal{C}[(E_n)]$, il faut et il suffit que f soit bornée, et que $f|_{E_n}$ appartienne à $\mathcal{C}(E_n)$ pour tout n .

Une partie A de $E = \bigcup_n E_n$ sera dite bornée s'il existe un entier naturel n tel que $A \subset E_n$. Donc, si $\mathcal{G}$ est une sous-famille de $\mathcal{C}[(E_n)]$, deux parties A, B de E sont bornées, $\mathcal{G}$ -séparées s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{G}$ tels que $A, B \subset E_n$, $0 \leq f \leq 1$, $f \equiv 0$ sur A , $f \equiv 1$ sur B .

3. Espaces, σ -Complètement Réguliers.

On verra, d'après le théorème de plongement (paragraphe 4), que les deux définitions suivantes sont équivalentes.

Définition 1. - Un espace topologique E est dit σ -complètement régulier s'il existe une suite croissante (E_n) de sous-espaces de E , et un sous-espace vectoriel coréticulé $\mathcal{G}$ de $\mathcal{C}[(E_n)]$ contenant 1 tels que

- (a) $E = \bigcup_n E_n$,
- (b) $\mathcal{G}$ sépare les points et les fermés de E ,
- (c) tout couple de parties bornées, $\mathcal{G}$ -séparées de E , est séparé dans E .

On remarque qu'il s'agit toujours de la topologie donnée sur E , et donc que les fonctions dans $\mathcal{G}$ ne sont pas continues en général.

Définition 2. - Un espace topologique E est dit σ -complètement régulier s'il existe une suite croissante (E_n) de sous-espaces de E , et une famille $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}[(E_n)]$ tels que

- (a) $E = \bigcup_n E_n$,
 (b) $\mathcal{C}$ sépare les points et les fermés de E_n pour tout n ,
 (c) tout couple de parties $\mathcal{C}$ -séparés de E_n est séparé dans E pour tout n .

Remarques.

1° L'énoncé de la définition 1 montre les liens avec les espaces complètement réguliers, surtout l'énoncé de la partie (b). Lorsqu'il s'agit d'applications, la définition 2 est plus efficace.

2° Les parties (b) et (c) des définitions entraînent que l'espace E est séparé.

3° Les trois exemples qui suivent et la démonstration du théorème de plongement (paragraphe 4) montreront que la propriété (c) des définitions, et le choix d'une sous-famille convenable $\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}[(E_n)]$ sont essentiels.

Exemple 1. - Soit $E = \mathbb{N}$ avec la topologie de complémentaires finis ($U \subset E$ est ouvert si $\mathbb{C}U$ est fini). Alors E est un espace $\mathcal{K}_\mathcal{C}$, mais non séparé. L'espace E ne vérifie pas la propriété (c) des définitions car il n'existe pas d'ouverts non vides disjoints dans E . On remarque que $\mathcal{C}(E) \approx \mathbb{R}$, et $\mathcal{C}[(E_n)] = \mathcal{C}(\mathbb{N})$, où $E_n = \{0, n\}$.

Exemple 2 (The relatively prime integer topology on $\mathbb{N}^*$; voir STEEN and SEEBACH [3]). - Soit $E = \mathbb{N}^*$. Pour tout couple $p, q \in \mathbb{N}^*$ tel que $(p, q) = 1$ (c'est-à-dire p, q sont premiers entre eux), soit $V_p(q) = \{q + pn; n \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}^*$.

La famille $\mathcal{B} = \{V_p(q); p, q \in \mathbb{N}^*, (p, q) = 1\}$ est une base d'une topologie séparée sur E , car

$$V_p(q) \cap V_r(s) = \begin{cases} \emptyset & q \not\equiv s \pmod{(p, r)} \\ V_{[p, r]}(t) & q \equiv s \pmod{(p, r)} \text{ et } t \in V_p(q) \cap V_r(s) . \end{cases}$$

(où $[p, r]$ est le plus petit commun multiple).

Ce qui est le plus intéressant dans cet exemple est le fait que $\text{ad}_E(V_p(q)) = p\mathbb{N}^*$ (puisque $V_p(q) \cap V_r(np) \neq \emptyset$ si $(p, r) = 1$), d'où

$$\text{ad}_E(V_p(q)) \cap \text{ad}_E(V_r(s)) \neq \emptyset .$$

Donc, on trouve encore que $\mathcal{C}(E) \approx \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}[(E_n)] = \mathcal{C}(\mathbb{N}^*)$, où $E_n = \{1, n\}$.

Ainsi, E est un espace $\mathcal{K}_\mathcal{C}$ séparé pour lequel $\mathcal{C}(E)$ est trivial. D'autre part, la propriété (c) de la définition 1 est vérifiée pour la famille $\mathcal{C} = \mathcal{C}[(E_n)]$ car les ensembles bornés sont les ensembles finis, donc, sous-ensembles bornés, $\mathcal{C}$ -séparés de E , sont séparés dans E .

Exemple 3. - Soit $E = [0, 1]$, et soit $I \subset E$ l'ensemble des irrationnels. Soit $\mathcal{F}$ la famille des ensembles fermés de $[0, 1]$, et soit $\mathcal{Q}$ la famille des parties dénombrables fermées de I . Alors, si E est muni de la topologie engendrée par $\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}$, on trouve que l'espace E est un espace de Baire car la topolo-

gie induite sur I par celle de E est la topologie usuelle sur I , et I est encore partout dense dans E .

Cependant, E n'est pas plongeable dans un espace $\mathcal{K}_\sigma$ séparé $F = \bigcup_n K_n$. S'il était vrai, alors $\text{int}_E(E \cap K_n)$ serait non vide ($E = \bigcup_n (E \cap K_n)$ et le théorème de Baire) pour un entier n . Mais $E \cap K_n$ serait complètement régulier, et cependant aucun ouvert n'est régulier dans E .

Jusqu'à ce qu'on montre que les espaces σ -complètement réguliers sont précisément les sous-espaces des espaces $\mathcal{K}_\sigma$ séparés, il n'est pas évident que l'espace E ne soit pas σ -complètement régulier. Le fait qu'il n'est pas σ -complètement régulier pour une suite de sous-espaces fermés est une conséquence de la proposition suivante.

PROPOSITION 1. - Si $E = \bigcup_n E_n$ est σ -complètement régulier, alors E_n est complètement régulier pour tout n .

Démonstration. - Si $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}[(E_n)]$ sépare les points et les fermés de E , alors $\mathcal{G}_n = \{f|_{E_n} ; f \in \mathcal{G}\} \subset \mathcal{C}(E_n)$ sépare les points et les fermés de E_n .

PROPOSITION 2. - Tout sous-espace d'un espace σ -complètement régulier est σ -complètement régulier.

Démonstration. - Soit $E \subset F = \bigcup_n F_n$, où F est σ -complètement régulier pour le sous-espace vectoriel coréticulé $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}[(F_n)]$. Alors E est σ -complètement régulier pour le sous-espace vectoriel coréticulé $\mathcal{G}' = \{f|_E ; f \in \mathcal{G}\} \subset \mathcal{C}[(E_n \cap F_n)]$.

LEMME. - Soit K un compact, et soit F, A, B des parties fermées de K telles que $A \cap B = \emptyset$ et $A \cap F, B \cap F \neq \emptyset$. Alors, toute fonction $f \in \mathcal{C}(F)$ telle que $f|_{A \cap F} \equiv 0$ et $f|_{B \cap F} \equiv 1$ se prolonge à une fonction $\hat{f} \in \mathcal{C}(K)$ telle que $\hat{f}|_A \equiv 0$ et $\hat{f}|_B \equiv 1$.

Démonstration. - La fonction $g(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ f(x) & x \in F \\ 1 & x \in B \end{cases}$ est continue sur $F \cup A \cup B$,

donc g se prolonge à une fonction continue $\hat{f} \in \mathcal{C}(K)$.

PROPOSITION 3. - Un espace $\mathcal{K}_\sigma$ séparé est σ -complètement régulier.

Démonstration. - Soit $X = \bigcup_n K_n$ où X est séparé et K_n est compact pour tout n . Soit F_1, F_2 deux parties fermées disjointes de X . On peut supposer que $K_1 \cap F_1, K_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Soit $f_1 \in \mathcal{C}(K_1)$ telle que $f_1(K_1 \cap F_1) = \{0\}$, $f_1(K_1 \cap F_2) = \{1\}$. D'après le lemme, f_1 se prolonge à une fonction $f_2 \in \mathcal{C}(K_2)$ telle que $f_2(K_2 \cap F_1) = \{0\}$ et $f_2(K_2 \cap F_2) = \{1\}$. Par récurrence, on a $f_n \in \mathcal{C}(K_n)$ telle que f_n se prolonge à f_{n+1} et telle que $f_n(K_n \cap F_1) = \{0\}$, $f_n(K_n \cap F_2) = \{1\}$. Alors, la fonction f telle que $f|_{K_n} = f_n$ est continue sur chaque compact K_n , et la fonction $g = (0 \vee f) \wedge 1$ appartient à $\mathcal{C}[(K_n)]$, et vé-

vérifie $g(F_1) = \{0\}$, $g(F_2) = \{1\}$.

Soit $\mathcal{G} = \mathcal{C}[(K_n)]$. La première partie de la démonstration montre que $\mathcal{G}$ sépare les points et les fermés de X . Soit $A, B \subset X$, deux ensembles bornés $\mathcal{G}$ -séparés. Alors il existe un entier n tel que $A, B \subset K_n$, et il existe une fonction $f \in \mathcal{G}$ telle que $f_A \equiv 0$, $f_B \equiv 1$. Donc $\text{ad}_X(A)$ et $\text{ad}_X(B)$ sont sous-ensembles fermés disjoints de K_n , donc ce sont des compacts disjoints de X , d'où A et B sont séparés dans X puisque X est séparé.

COROLLAIRE. - La topologie inductive pour une suite croissante de compacts est normale.

4. Le théorème de plongement.

LEMME 1. - Soit E complètement régulier, soit F un sous-espace de E , et soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}(E)$ une sous-famille qui sépare les points et les fermés de E .
Soit

$$P = \pi\{\text{ad}_{\widetilde{R}}(f(E)) ; f \in \mathcal{G}\}$$

$$Q = \pi\{\text{ad}_{\widetilde{R}}(f(F)) ; f \in \mathcal{G}\}.$$

Alors, le diagramme suivant est un diagramme commutatif de plongements, où $\varphi : E \longrightarrow P$ et $\psi : F \longrightarrow Q$ sont définies par $x \longmapsto (f(x))_{f \in \mathcal{G}}$ et $y \longmapsto (f_F(y))_{f \in \mathcal{G}}$, respectivement.

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\psi} & \text{ad}_Q(\psi(F)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{\varphi} & \text{ad}_P(\varphi(E)) \end{array}.$$

Toute fonction $f \in \mathcal{G}$ se prolonge à une fonction continue

$$\hat{f} : \text{ad}_P(\varphi(E)) \longrightarrow \text{ad}_{\widetilde{R}}(f(E)).$$

En effet, si π_F dénote la restriction à $\text{ad}_P(\varphi(E))$ de la projection de P sur $\text{ad}_{\widetilde{R}}(f(E))$, alors $\hat{f} = \pi_F$. En particulier, si $x \neq y$ dans $\text{ad}_P(\varphi(E))$, alors il existe une fonction $f \in \mathcal{G}$ telle que $\hat{f}(x) \neq \hat{f}(y)$.

Rappelons qu'un ensemble ouvert U est dit ouvert régulier si $\text{int}(\text{ad}(U)) = U$, et un ensemble fermé F est dit fermé régulier si $\text{ad}(\text{int}(F)) = F$.

Si U est ouvert régulier, alors $\text{ad}(U)$ est fermé régulier, et si F est fermé régulier, alors $\text{int}(F)$ est ouvert régulier.

Si E est un espace régulier, et si $\mathcal{B}$ est une base pour la topologie de E , alors

$$\mathcal{B}' = \{\text{int}(\text{ad}(B)) : B \in \mathcal{B}\}$$

est une base d'ouverts réguliers.

LEMME 2. - Soit X partout dense dans E . Pour que U soit ouvert régulier

dans E , il faut et il suffit que $U \cap X$ soit ouvert régulier dans X . De plus, on a

$$U = \text{int}_E(\text{ad}_E(U \cap X)) .$$

Démonstration. - D'abord, supposons que ω soit ouvert régulier dans X . Soit V ouvert dans E tel que $\omega = V \cap X$. Alors

$$U = \text{int}_E(\text{ad}_E(V)) = \text{int}_E(\text{ad}_E(\omega))$$

est ouvert régulier dans E , et $V \subset U$. Donc

$$\begin{aligned} \omega = V \cap X &\subset U \cap X = \text{int}_E(\text{ad}_E(\omega)) \cap X \\ &\subset \text{int}_X(\text{ad}_E(\omega) \cap X) \\ &= \text{int}_X(\text{ad}_X(\omega)) = \omega , \end{aligned}$$

car ω est ouvert régulier dans X . Ceci montre que $\omega = U \cap X$ et $U = \text{int}_E(\text{ad}_E(U \cap X))$.

Maintenant, supposons que U soit ouvert régulier dans E . Alors,

$$\omega = \text{int}_X(\text{ad}_X(U \cap X))$$

est ouvert régulier dans X , et $\text{ad}_X(\omega) = \text{ad}_X(U \cap X)$. Donc

$$\text{ad}_E(\omega) = \text{ad}_E(U \cap X) = \text{ad}_E(U) ,$$

d'où

$$U = \text{int}_E(\text{ad}_E(U)) = \text{int}_E(\text{ad}_E(\omega)) .$$

D'après la première partie de la démonstration, on a

$$\omega = U \cap X .$$

LEMME 3. - Soit $E = \bigcup_n E_n$, et soit X une partie de E telle que $X \cap E_n$ soit un sous-espace régulier partout dense de E_n pour tout n . Supposons que U_1, U_2 sont des ouverts réguliers disjoints de E_1 . Alors, pour tout couple V_1, V_2 d'ouverts disjoints de X tel que $U_j \cap E_1 \subset V_j$ ($j = 1, 2$) , il existe un couple ω_1, ω_2 de parties de E tel que

- (a) $U_j \subset \omega_j$ ($j = 1, 2$) ,
- (b) $V_j = X \cap \omega_j$ ($j = 1, 2$)
- (c) $\omega_j \cap E_n$ soit ouvert dans E_n ($j = 1, 2 ; n \geq 1$) .

Démonstration. - Pour tout n , et pour $j = 1, 2$, soit

$$\omega_{j,n} = \{\text{int}_{E_n}(\text{ad}_{E_n}(\omega)) ; \omega \subset V_j \cap E_n \text{ ouvert régulier}\} .$$

Les ensembles $\omega_{j,n}$ sont croissants pour n (j fixé). D'après le lemme 2,

$$\omega_{j,n} \cap X = \omega_{j,n} \cap (X \cap E_n) = V_j \cap E_n .$$

De plus, $U_j \subset \omega_{j,1}$ ($j = 1, 2$) , car U_1, U_2 sont ouverts réguliers dans E_1 .

Soit $\omega_j = \bigcup_n \omega_{j,n}$ ($j = 1, 2$) . On a $\omega_{1,n} \cap \omega_{2,n} = \emptyset$ pour tout n , autrement

$$\omega_{1,n} \cap \omega_{2,n} \cap X = V_1 \cap V_2 \cap E_n \neq \emptyset ,$$

ce qui contredit la supposition que V_1 et V_2 soient disjoints.

Donc, ω_1 et ω_2 sont disjoints, et $U_j \subset \omega_j$ ($j = 1, 2$). Ceci établit la partie (a).

Pour la partie (b), on a

$$X \cap \omega_j = \bigcup_n (X \cap \omega_{j,n}) = \bigcup_n (V_j \cap E_n) = V_j.$$

Enfin, pour la partie (c), on a

$$\omega_j \cap E_n = \bigcup_{p \geq n} (E_n \cap \omega_{j,p}),$$

qui est ouvert dans E_n , puisque $\omega_{j,p}$ est ouvert dans E_p .

THÉOREME (de plongement). - Tout espace σ -complètement régulier est partout dense dans un espace K_σ séparé.

Démonstration. - Soit $E = \bigcup_n E_n$ un espace σ -complètement régulier pour le sous-espace vectoriel coréticulé $\mathfrak{G} \subset \mathcal{C}[(E_n)]$. Soit H_n l'adhérence de E_n dans $\pi\{\text{ad}(f(E_n)) ; f \in \mathfrak{G}\}$. D'après le lemme 1, l'espace E_n est un sous-espace de H_n , et H_n est un sous-espace de H_{n+1} pour tout n . Soit $H = \bigcup_n H_n$ muni de la topologie inductive par rapport aux injections $E \hookrightarrow H$ et $H_n \hookrightarrow H$ ($n \geq 1$). Alors, E est un sous-espace partout dense dans H , et il ne reste qu'à montrer que H est séparé.

Donc, soit $x, y \in H$, $x \neq y$. On peut supposer que $x, y \in H_1$. Il existe une fonction $f \in \mathfrak{G}$ telle que $\hat{f}(x) \neq \hat{f}(y)$, où $\hat{f}$ est un prolongement de f , $\hat{f} \in \mathcal{C}[(H_n)]$. Il existe, donc, deux ouverts réguliers disjoints U_1, U_2 de H_1 tels que $x \in U_1$, $y \in U_2$, et tels que

$$\sup_{t \in U_1} \hat{f}(t) < \inf_{t \in U_2} \hat{f}(t)$$

(on se sert de $\hat{f}$ ou $-\hat{f}$). Puisque $f = \hat{f}|_E$ ($f \in \mathfrak{G}$), il existe une fonction $g \in \mathfrak{G}$ telle que $g(U_1 \cap E) = \{0\}$ et $g(U_2 \cap E) = \{1\}$. D'après le lemme 2, les ensembles $U_1 \cap E$ et $U_2 \cap E$ sont des ouverts réguliers dans E_1 .

Donc, les ensembles $U_1 \cap E$ et $U_2 \cap E$ sont des parties bornées, $\mathfrak{G}$ -séparées de E , et la propriété (c) de la définition 1 entraîne qu'il existe deux ouverts disjoints V_1, V_2 de E qui séparent $U_1 \cap E$ et $U_2 \cap E$. D'après le lemme 3, il existe deux ensembles disjoints ω_1, ω_2 de H tels que

- (a) $U_j \subset \omega_j$ ($j = 1, 2$),
- (b) $V_j = \omega_j \cap E$ ($j = 1, 2$),
- (c) $\omega_j \cap H_n$ est ouvert dans H_n ($j = 1, 2 ; n \geq 1$).

Maintenant, la définition de la topologie sur H montre que ω_1 et ω_2 sont des voisinages disjoints de x et y respectivement.

Remarques.

- (i) D'après le théorème de plongement, on voit que si $E = \bigcup_n E_n$ est σ -

complètement régulier, alors E est encore σ -complètement régulier pour la suite $(ad_E(E_n))_{n \geq 1}$. Donc l'espace E de l'exemple 3 n'est pas σ -complètement régulier.

(ii) La démonstration du théorème de plongement montre qu'il suffit de supposer que la famille $\mathcal{S}$ sépare les points et les fermés bornés de E . On voit aussi qu'il n'est même pas nécessaire de supposer que la famille $\mathcal{S}$ possède une structure d'espace vectoriel réticulé, d'où l'équivalence des définitions 1 et 2.

COROLLAIRE. - Soit $\mathcal{S}$ une sous-famille de $\mathcal{C}(E_n)$ telle que $\mathcal{S}$ sépare les points et les fermés bornés de E , et telle que tout couple de parties bornées, $\mathcal{S}$ -séparées de E , soit séparé dans E . Alors, E est σ -complètement régulier pour un sous-espace vectoriel coréticulé $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{C}(E_n)$ contenant $\mathcal{S}$.

Démonstration. - Il existe un espace $\mathcal{K}_\sigma$ séparé $X = \bigcup_n K_n$ tel que E_n soit partout dense dans K_n pour tout n . Alors E est σ -complètement régulier pour la famille $\mathcal{S}' = \{f_E; f \in \mathcal{C}(K_n)\} \subset \mathcal{C}(E_n)$, qui contient $\mathcal{S}$.

5. Quelques applications.

Définition. - Un sous-espace E d'un espace topologique F est $\mathcal{C}$ -plongé dans F si toute fonction $f \in \mathcal{C}(E)$ se prolonge à une fonction $\bar{f}$ dans $\mathcal{C}(F)$. (Notation : $E \hookrightarrow \mathcal{C} F$.)

PROPOSITION. - Soit $E = \bigcup_n E_n$ une réunion croissante de sous-espaces complètement réguliers telle que

(a) $E_n \hookrightarrow \mathcal{C} E_{n+1}$ pour tout n ,

(b) Tout couple de parties complètement séparées de E_n est séparé dans E pour tout n .

Alors E est σ -complètement régulier.

Démonstration. - C'est immédiat d'après la définition 2 avec la famille $\mathcal{S} = \mathcal{C}(E_n)$.

La proposition suivante est essentiellement la caractérisation de MacGIBBON [2] des espaces $\mathcal{K}$ -analytiques qui sont plongeables dans un espace $\mathcal{K}_\sigma$ séparé.

PROPOSITION. - Soit $E = \bigcup_n E_n$ une réunion croissante de sous-espaces fermés complètement réguliers telle que tout couple de parties complètement séparées de E_n est séparé dans E pour tout n . Si l'espace E est de Lindelöf, alors E est σ -complètement régulier.

Démonstration. - Chaque sous-espace E_n est de Lindelöf puisqu'il est fermé. Donc E_n est normal, et fermé dans E_{n+1} pour tout n , d'où $E_n \hookrightarrow \mathcal{C} E_{n+1}$ pour tout n . Maintenant, la conclusion est une conséquence de la proposition précédente.

PROPOSITION. - Si $E = \bigcup_n E_n$ est une réunion croissante de sous-espaces complètement réguliers telle que $E_n \xrightarrow{C} E$ pour tout n , alors E est complètement régulier.

Démonstration. - Dans ce cas, $C(E) = C[(E_n)]$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHOQUET (G.). - Ensembles $\mathcal{K}$ -analytiques et $\mathcal{K}$ -sousliniens ; cas général et cas métrique, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 9, 1959, p. 75-81.
- [2] MacGIBBON (Brenda TAYLOR-). - $\mathcal{K}$ -analytic spaces and countable operations in topology, Ph. D. Thesis, Mc Gill University, Montreal, 1970.
- [3] STEEN (L. A.) and SEEBACH (J. A., Jr). - Counterexamples in topology. - New York, Montreal, Holt, Rinehart and Winston, 1970.

(Texte reçu le 21 juin 1977)

Peter KOLMUS
 Equipe d'Analyse, Tour 46
 Université Pierre et Marie Curie
 4 place Jussieu
 75230 PARIS CEDEX 05

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I
 LABORATOIRE
 DE MATHÉMATIQUES PURES
 INSTITUT FOURIER