

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

MICHÈLE CAPON

Compacts de fonctions de première classe

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. n° 4, p. 1-2

http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A2_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPACTS DE FONCTIONS DE PREMIERE CLASSE

par Michèle CAPON

Dans tout l'exposé, X désigne un espace polonais, et $B_1(X)$ désigne l'espace des fonctions de première classe de Baire sur X . Le but de ce travail est de caractériser les parties relativement compactes de $B_1(X)$ (par la topologie de la convergence simple). Nous ne donnerons que les énoncés principaux et les références bibliographiques les concernant.

1. Caractérisation des compacts de $B_1(X)$.

THÉOREME 1. - Soit F une partie de $B_1(X)$, les énoncés suivants sont équivalents :

- 1° F est relativement compact dans $B_1(X)$ pour la convergence simple ;
- 2° Toute suite infinie de F admet une valeur d'adhérence dans $B_1(X)$;
- 3° Toute suite infinie de F admet une sous-suite convergente dans $B_1(X)$.

De plus, si ces conditions sont réalisées, on a :

- (a) Toute fonction de $\bar{F}$ est dans l'adhérence d'une partie dénombrable de F ;
- (b) Si F est uniformément bornée, et si $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ est un filtre sur F qui converge simplement vers f , alors f_α converge vers f pour la topologie faible relative aux mesures sur X .

Dans le second paragraphe, nous donnons des applications intéressantes de ce théorème aux espaces de Banach qui contiennent un espace isomorphe à $\ell_1(\mathbb{N})$.

2. Espaces de Banach contenant $\ell_1(\mathbb{N})$.

On dit qu'une suite (x_n) de X est équivalente à $\ell_1(\mathbb{N})$ s'il existe des constantes k_1 et k_2 telles que

$$k_1 \sum_{i=1}^n |a_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq k_2 \sum_{i=1}^n |a_i|$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a_i \in \mathbb{R}$.

THÉOREME 2. - Soit B un espace de Banach séparable. S'il existe dans B'' une suite bornée ne possédant aucune sous-suite convergente pour $\sigma(B'', B')$, alors B contient une suite équivalente à $\ell_1(\mathbb{N})$.

COROLLAIRE. - Soit B un espace de Banach (séparable ou non), et (g_n) une suite bornée de B qui n'admet aucune sous-suite de Cauchy pour $\sigma(B, B')$, alors

(g_n) admet une sous-suite équivalente à $\ell_1(\mathbb{N})$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ODELL (E.) and ROSENTHAL (H. P.), - A double-dual characterization of separable Banach spaces containing ℓ^1 , *Israel J. of Math.*, t. 20, 1975, p. 375-384.
- [2] ROSENTHAL (H. P.), - A characterization of Banach spaces containing ℓ^1 , *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 71, 1974, p. 2411-2413.
- [3] ROSENTHAL (H. P.), - Pointwise compact subsets of the first Baire class (à paraître).

(Texte reçu le 21 février 1977)

Michèle CAPON
 Mathématiques, Bâtiment 425
 Université de Paris-sud
 Campus universitaire
 91405 ORSAY
